

Міністерство освіти і науки України  
Міжнародний економіко-гуманітарний університет  
ім. академіка С. Дем'янчука

Р.М.Літнарвич

**ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ  
ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ БАЗОВОЇ  
ДИСЦИПЛІНИ В РАМКАХ РОБОТИ НАУКОВОЇ  
ШКОЛИ**

**Частина 5**



**Рівне, 2009**

## **УДК 519.876.5**

Літнарівич Р.М. Теоретико-методологічні основи побудови математичної моделі базової дисципліни в рамках роботи наукової школи. МЕНУ, Рівне, 2009, -100 с.

Рецензент: С.В. Лісова, доктор педагогічних наук, професор

Відповідальний за випуск: Й.В. Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор

### **Дослідження проведені в рамках роботи наукової школи МЕНУ**

Явище, яке залежить від багатьох факторів, можна описати за допомогою множинної регресії. Дослідивши взаємозв'язок рівнів засвоєння знань студентів і ступенів абстракції у досліджуваному семестрі, побудувавши стохастичний зв'язок між ними і з'ясувавши адекватність побудованої математико-педагогічної моделі на основі отриманих даних, цілком можливо з деякою вірогідністю прогнозувати майбутнє.

Litnarovich R.M. Theoretico-methodological bases of construction of mathematical model of base discipline within the framework of work of scientific school. IENU, Rivne, 2009 -100 s.

Phenomenon which depends on many factors, it is possible to describe by multiple regression. Probing interconnection levels of mastering of knowledges of students and degrees of abstraction in the probed semester, building empiric connection between them and finding out adequacy of the built mathematico-pedagogical model on the basis of findings, very possibly with some authenticity to forecast the future.

© Літнарівич Р.М.

Передмова.....	4
5.1. Розробка методологічних основ побудови математичної моделі базової дисципліни в рамках роботи наукової школи .....	5
5.2. Представлення загальних статистичних даних по результатам педагогічного експерименту.....	11
5.3. Теоретичні основи обробки експериментальних даних.....	18
5.4. Контроль процедури зрівноваження.....	32
5.5. Дослідження матриці на невиродженність.....	35
5.6. Дослідження точності елементів зрівноваженої моделі.....	38
5.6.1. Дослідження коефіцієнта множинної кореляції.....	38
5.6.2. Встановлення надійних інтервалів базисних даних та прогнозу.....	47
5.6.3. Розробка критеріїв оцінювання знань студентів.....	52
5.6.4. Аналіз коваріаційної та кореляційної матриць.....	77
5.7. Виключення з математичної моделі незначимих факторів.....	90
Висновки .....	96
Літературні джерела.....	99

## ПЕРЕДМОВА

Після проведення екзаменаційної сесії студенти провели експертну оцінку і була отримана зведена таблиця за результатами анкетування. Даний базовий курс вивчало 38 студентів.

Це дало змогу провести аналіз педагогічного експерименту на основі вивчення множинної регресії для коригування і оптимального розподілу матеріалу та більш детального і повного представлення педагогічної ситуації, що складалася в процесі вивчення базового курсу. Зрозуміло, що всі процеси дидактики розглядалися у взаємозв'язку.

Явище, яке залежить від багатьох факторів, можна описати за допомогою множинної регресії. Дослідивши взаємозв'язок рівнів засвоєння знань студентів і ступенів абстракції у досліджуваному семестрі, побудувавши стохастичний зв'язок між ними і з'ясувавши адекватність побудованої математико-педагогічної моделі на основі отриманих даних, цілком можливо з деякою вірогідністю прогнозувати майбутнє.

Робиться оцінка точності і даються узагальнюючі висновки. Приміняємий в подальшому метод статистичних випробувань Монте Карло дає можливість провести широкомасштабні дослідження і набрати велику статистику.

Для студентів і аспірантів педагогічних вузів.

## **5.1. Розробка методологічних основ побудови математичної моделі базової дисципліни в рамках роботи наукової школи**

Нехай,  $Y$ -екзаменаційна оцінка студента (від 0 до 100 балів за шкалою EST – результуюча ознака).

Досліджувані фактори:

- X1- інтерес до вивчення дисципліни (0-5 балів);
- X2- оцінка студентами роботи викладача (0-5 балів);
- X3- трудність вивчення дисципліни (0-5 балів);
- X4- елементи наукового пошуку (0-5 балів);
- X5- зв'язок зі спеціальністю (0-5 балів);
- X6- степінь самостійності в написанні першої монографії (0-5балів);
- X7- степінь самостійності в написанні другої монографії (0-5балів);
- X8- оцінка студентами створеної наукової школи (0-5 балів).

X1- інтерес до вивчення дисципліни:

«0 балів»- інтерес до вивчення дисципліни відсутній; «В мене абсолютно відсутнє бажання вивчати дану дисципліну і оцінка на екзамені мене не інтересує».

«1 бал»- інтерес до вивчення дисципліни обумовлений необхідністю отримати задовільну оцінку на екзамені «50-59 балів» - E;

«2 бали»- інтерес до вивчення дисципліни обумовлений необхідністю отримати задовіль-ну оцінку що відповідає шкалі EST D «60-75 балів»; «Пристойно, але зі значними недоліками»;

«3 бали» - «Мені потрібна оцінка С «76-79 балів» для того, щоб була четвірка у виписці до диплому»;

«4 бали»- інтерес до дисципліни високий, відповідає шкалі EST «80-89 балів» - «Дуже добре,вище середнього стандарту»;

«5 балів»- підвищений інтерес; «Я бажаю внести свій внесок в дану дисципліну»- рівень творчості.

X2- оцінка студентами роботи викладача:- відповідає традиційній екзаменаційній оцінці роботи студента «від 0 до 5 балів» з тією різницею, що оцінку роботи студента за семестр ставить викладач, а оцінку роботи викладача за семестр ставить студент.

X3- трудність вивчення дисципліни:

« 0 балів» - ніякої труднощі у вивченні даної дисципліни немає;

«1 бал» - при вивченні даної дисципліни потрібні мінімальні затрати сил і часу;

« 2 бали»- до вивчення дисципліни необхідно прикласти деякі зусилля і час;

« 3 бали»- методика викладання дисципліни автоматично забезпечує добру оцінку на екзамені;

« 4 бали» - до вивчення дисципліни потрібна значна концентрація зусиль і часу;

«5 балів»- максимальна концентрація зусиль і часу гарантує високу оцінку на екзамені.

X4- елементи наукового пошуку:

«0 балів»- вся інформація при вивченні даної дисципліни добре представлена у рекомендованій літературі;

«1 бал»- необхідно вести конспект лекцій , в якому висвітлюються матеріали , яких не можна почерпнути із відомих літературних джерел;

« 2 бали»- без конспекта лекцій неможливо проробляти практичні заняття;

« 3 бали»- на практичних роботах рішаються задачі, які потребують творчого підходу і максимального використання комп'ютерної техніки;

«4 бали»- максимальне використання теоретичного матеріалу лекційного курсу в поєднанні із максимальним використанням комп'ютерної техніки;

«5 балів»- написання власних монографій під керівництвом наукового керівника.

X5- зв'язок зі спеціальністю:

«0 балів»- «Я не можу відмітити зв'язку зі спеціальністю;

«1 бал» - зв'язок зі спеціальністю незначний;

« 2 бали»- зв'язок зі спеціальністю помірний;

« 3 бали»- зв'язок зі спеціальністю добрий;

«4 бали»- зв'язок зі спеціальністю високий;

«5 балів»- зв'язок зі спеціальністю повний.

X6, X7- степінь самостійності в написанні монографії:

«0 балів»- я не зміг завершити дослідження , щоб написати монографію;

«1 бал» - монографія не завершена;

« 2 бали»- «Мені допомогли завершити роботу над монографією»;

« 3 бали»- «Я сам написав монографію при консультації і наявності допоміжних матеріалів»;

«4 бали»- «Необхідні розрахункові файли створені мною особисто»;

«5 балів»- « Монографія написана, набрана на комп'ютері і видана при моїй же власній авторській редакції».

X8- оцінка студентами створеної наукової школи:

«0 балів»- наукова школа не відбулась, монографії не написані;

«1 бал» - 10 відсотків студентів написали власні монографії;

« 2 бали»- 25 відсотків студентів написали монографії;

« 3 бали»- 50 відсотків студентів написали монографії;

« 4 бали»- 75 відсотків студентів написали монографії;

« 5 балів»- 85 відсотків студентів написали монографії.

Після проведення екзаменаційної сесії студенти провели експертну оцінку і була отримана слідуєча зведена таблиця за результатами анкетування. Даний базовий курс вивчало 38 студентів.



Таблиця 5.1.1.Зведена таблиця успішності по шкалі EST

№п.п..	Екз.оц.	Інте рес вивчення дисципл.	Оцінка викладачу	Трудність вивчення дисципліни	Елем.наук.пошуку	Зв'язок зі спец.	Оцінка моногр.1	Оцінка монogr.2	Оцінка Наук.школ.	
	У	X0	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
1	100	1	5	5	4	4	4	5	5	5
2	90	1	5	5	5	5	5	5	5	5
3	90	1	5	5	5	5	5	5	5	5
4	100	1	5	5	3	5	5	5	5	5
5	89	1	4	4	3	4	4	5	4	5
6	89	1	5	5	3	4	5	5	5	5
7	95	1	5	5	5	5	5	5	5	5
8	100	1	5	5	2	5	5	5	5	5
9	90	1	5	5	5	5	5	5	5	5
10	89	1	4	5	4	5	4	5	0	5
11	100	1	5	5	5	5	5	5	5	5
12	80	1	4	5	4	5	4	0	0	4
13	89	1	4	5	4	4	4	5	4	5
14	90	1	5	5	3	5	5	5	5	5
15	100	1	5	5	4	3	5	5	5	5

	0									
16	90	1	5	5	4	4	5	5	5	5
17	10 0	1	4	5	4	4	4	5	5	5
18	10 0	1	5	5	5	5	5	4	5	5
19	77	1	5	5	3	5	5	4	0	5
20	77	1	5	5	3	5	5	5	5	5
21	10 0	1	5	5	5	5	5	5	5	5
22	10 0	1	5	5	4	4	5	5	5	5
23	90	1	4	5	4	4	4	5	4	4
24	10 0	1	5	5	3	5	5	5	5	5
25	10 0	1	5	5	3	5	5	5	5	5
26	10 0	1	5	5	4	4	5	5	5	5
27	10 0	1	5	5	3	5	5	5	5	5
28	10 0	1	5	5	5	5	5	5	5	5
29	10 0	1	5	5	3	5	5	5	5	5
30	85	1	4	5	5	5	5	5	5	5

31	90	1	5	5	3	5	5	5	5	5
32	90	1	4	5	4	5	5	5	5	5
33	86	1	5	5	5	5	5	5	5	5
34	86	1	5	5	3	5	5	5	5	5
35	10 0	1	5	5	3	5	5	5	5	5
36	90	1	5	5	5	5	5	5	5	5
37	95	1	5	5	3	4	5	5	5	4
38	10 0	1	5	5	5	5	5	5	5	5
$\Sigma$	35 47	3 8	182	189	148	178	183	183	172	187

## 5.2. Представлення загальних статистичних даних по результатам педагогічного експерименту

Представимо матрицю  $X$  коефіцієнтів початкових рівнянь

Приведемо описову статистику на 8 останніх стовпчиків матриці (значень  $X_1, X_2, \dots, X_8$ )

1	1	5	5	4	4	4	5	5	5
2	1	5	5	5	5	5	5	5	5
3	1	5	5	5	5	5	5	5	5
4	1	5	5	3	5	5	5	5	5
5	1	4	4	3	4	4	5	4	5
6	1	5	5	3	4	5	5	5	5
7	1	5	5	5	5	5	5	5	5
8	1	5	5	2	5	5	5	5	5
9	1	5	5	5	5	5	5	5	5
10	1	4	5	4	5	4	5	0	5
11	1	5	5	5	5	5	5	5	5
12	1	4	5	4	5	4	0	0	4
13	1	4	5	4	4	4	5	4	5
14	1	5	5	3	5	5	5	5	5
15	1	5	5	4	3	5	5	5	5
16	1	5	5	4	4	5	5	5	5
17	1	4	5	4	4	4	5	5	5
18	1	5	5	5	5	5	4	5	5
19	1	5	5	3	5	5	4	0	5
20	1	5	5	3	5	5	5	5	5
21	1	5	5	5	5	5	5	5	5
22	1	5	5	4	4	5	5	5	5
23	1	4	5	4	4	4	5	4	4
24	1	5	5	3	5	5	5	5	5
25	1	5	5	3	5	5	5	5	5
26	1	5	5	4	4	5	5	5	5
27	1	5	5	3	5	5	5	5	5
28	1	5	5	5	5	5	5	5	5

29	1	5	5	3	5	5	5	5	5
30	1	4	5	5	5	5	5	5	5
31	1	5	5	3	5	5	5	5	5
32	1	4	5	4	5	5	5	5	5
33	1	5	5	5	5	5	5	5	5
34	1	5	5	3	5	5	5	5	5
35	1	5	5	3	5	5	5	5	5
36	1	5	5	5	5	5	5	5	5
37	1	5	5	3	4	5	5	5	4
38	1	5	5	5	5	5	5	5	5

Відповіді студентів:

- 1 стовпчик-Інтерес до вивчення дисципліни ( $X_1$ );
- 2 стовпчик-Оцінка студентами роботи викладача ( $X_2$ );
- 3 стовпчик-Трудність вивчення дисципліни ( $X_3$ );
- 4 стовпчик-Елементи наукового пошуку ( $X_4$ );
- 5.стовпчик-Зв'язок зі спеціальністю ( $X_5$ );
- 6.стовпчик-Оцінка студентами своєї роботи над монографією 1( $X_6$ );
- 7.стовпчик- Оцінка студентами своєї роботи над монографією 2( $X_7$ );
- 8.стовпчик-Оцінка студентами роботи наукової школи в цілому ( $X_8$ ).

Таблиця 5.1.2. Описова статистика

<i>Стол бец1</i>	<i>Стол бец2</i>	<i>Стол бец3</i>	<i>Стол бец4</i>				
Сред нее	4,789 474	Сред нее	4,973 68421	Сред нее	3,894 7368	Сред нее	4,684 2105
			1				
Станд артна я ошиб ка Меди ана Мода	0,067 023 5	Станд артна я ошиб ка Меди ана Мода	0,026 31578 9 ошиб ка 5	Станд артна я ошиб ка Меди ана Мода	0,145 0436 4	Станд артна я ошиб ка Меди ана Мода	0,085 218 5
Станд артно е откло нение Диспе рсия выбо рки Эксце сс	0,413 155 0,170 697 0,195 278	Станд артно е откло нение Диспе рсия выбо рки Эксце сс	0,162 22142 1 откло нение 0,026 31578 9 откло нение 38	Станд артно е откло нение Диспе рсия выбо рки Эксце сс	0,894 1091 431 - 1,281 3299	Станд артно е откло нение Диспе рсия выбо рки Эксце сс	0,525 3191 9602 1,126 0723
Асим метри чность ь Интер вал Мини	- 1,479 133 ь 1 4	- Асим метри чность ь Интер вал Мини	- Асим метри чность ь 3 ь 1 4	- Асим метри чность ь Интер вал Мини	- Асим метри чность ь 3 Интер вал 2	- Асим метри чность ь Интер вал Мини	- 1,403 1726 2 3

мум	мум	мум	мум	мум	5
Макси	5 Макси	5 Макси	5 Макси	5 Макси	
мум	мум	мум	мум	мум	
Сумм	182 Сумм	189 Сумм	148 Сумм	Сумм	178
а	а	а	а	а	
Счет	38 Счет	38 Счет	38 Счет	Счет	38
Урове	0,135 Урове	0,053 Урове	0,293 Урове	Урове	0,172
нь	801 нь	32085 нь	8863 нь	нь	6681
наде	наде	4 наде	наде	наде	
жност	жност	жност	жност	жност	
и(95,0	и(95,0	и(95,0	и(95,0	и(95,0	
%)	%)	%)	%)	%)	

<i>Стол</i>	<i>Стол</i>	<i>Стол</i>	<i>Стол</i>	<i>Стол</i>	
<i>бец5</i>	<i>бец6</i>	<i>бец7</i>	<i>бец8</i>		

Средн	4,815 Средн	4,815 Сред	4,526 Сред	4,921	
ее	7895 еее	789 нее	316 нее	053	
Станд	0,063 Станд	0,135 Стан	0,222 Стан	0,044	
артна	7302 артна	227 дартн	289 дартн	331	
я	я	ая	ая		
ошибк	ошибк	ошиб	ошиб		
а	а	ка	ка		
Меди	5 Меди	5 Меди	5 Меди	5	
ана	ана	ана	ана		
Мода	5 Мода	5 Мода	5 Мода	5	
Станд	0,392 Станд	0,833 Стан	1,370 Стан	0,273	
артно	8595 артно	594 дартн	28 дартн	276	
е	е	ое	ое		
откло	откло	откло	откло		
нение	нение	нение	нение		
Диспе	0,154 Диспе	0,694 Диспе	1,877 Дисп	0,074	
рсия	3385 рсия	879 рсия	667 ерсия	68	
выбор	выбор	выбо	выбо		

ки	ки	рки	рки		
Эксце	0,925	Эксце	32,21	Эксце	8,110
сс	609	сс	157	сс	829
Асим	-	Асим	-	Асим	-
метри	1,696	метри	5,543	метри	3,051
чност	96	чност	404	чност	8
ь	ь	ь	ь	ть	
Интер	1	Интер	5	Интер	5
вал	вал	вал	вал	вал	
Мини	4	Мини	0	Мини	0
мум	мум	мум	мум	мум	
Макси	5	Макси	5	Макс	5
мум	мум	мум	мум	мум	
Сумм	183	Сумм	183	Сумм	172
а	а	а	а	а	
Счет	38	Счет	38	Счет	38
Урове	0,129	Урове	0,273	Урове	0,450
нь	1297	нь	996	нь	4
надеж	надеж	наде	наде	наде	
ности(	ности(	жност	жност	жност	
95,0%	95,0%	и(95,0	и(95,0	и(95,	
)	)	%)	%)	0%)	

Таблиця 5.1.3. Описова статистика результатів екзамену (оцінки по EST-вектор У)

<i>Столбец1У</i>	
Среднее	93,34211
Стандартная ошибка	1,139162
Медиана	92,5
Мода	100
Стандартное отклонение	7,022267



Дисперсия выборки	49,31223
	-
Эксцесс	0,371058
	-
Асимметричность	0,668396
Интервал	23
Минимум	77
Максимум	100
Сумма	3547
Счет	38
Наибольший(1)	100
Наименьший(1)	77
Уровень надежности(95,0%)	2,308162

Забігаючи вперед, порівняємо статистику оцінок викладача (табл..5.1.3) з оцінками, виставленими студентам комп'ютером (табл.5.1.4)

Таблиця 5.1.4.Описова статистика результатів екзамену за оцінками комп'ютера

<i>У'Столбец1</i>	
Среднее	93,34211
Стандартная ошибка	0,674123
Медиана	94,44051
Мода	94,44051
Стандартное отклонение	4,155576
Дисперсия выборки	17,26881
Эксцесс	4,152453
Асимметричность	-

	1,759888
Интервал	22,26522
Минимум	80,19449
Максимум	102,4597
Сумма	3547
Счет	38
Наибольший(1)	102,4597
Наименьший(1)	80,19449
Уровень надежности(95,0%)	1,365904

В подальшому приведемо теоретичні основи обробки експериментальних даних.

### 5.3. Теоретичні основи обробки експериментальних даних

Представимо  $n$  початкових рівнянь у вигляді

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= a_0 + a_1 X_{11} + a_2 X_{21} + a_3 X_{31} + a_4 X_{41} + a_5 X_{51} + a_6 X_{61} + a_7 X_{71} + a_8 X_{81} + l_1, \\
 Y_2 &= a_0 + a_1 X_{12} + a_2 X_{22} + a_3 X_{32} + a_4 X_{42} + a_5 X_{52} + a_6 X_{62} + a_7 X_{72} + a_8 X_{82} + l_2, \\
 Y_3 &= a_0 + a_1 X_{13} + a_2 X_{23} + a_3 X_{33} + a_4 X_{43} + a_5 X_{53} + a_6 X_{63} + a_7 X_{73} + a_8 X_{83} + l_3, \\
 Y_4 &= a_0 + a_1 X_{14} + a_2 X_{24} + a_3 X_{34} + a_4 X_{44} + a_5 X_{54} + a_6 X_{64} + a_7 X_{74} + a_8 X_{84} + l_4, \\
 Y_5 &= a_0 + a_1 X_{15} + a_2 X_{25} + a_3 X_{35} + a_4 X_{45} + a_5 X_{55} + a_6 X_{65} + a_7 X_{75} + a_8 X_{85} + l_5, \\
 Y_6 &= a_0 + a_1 X_{16} + a_2 X_{26} + a_3 X_{36} + a_4 X_{46} + a_5 X_{56} + a_6 X_{66} + a_7 X_{76} + a_8 X_{86} + l_6, \\
 Y_7 &= a_0 + a_1 X_{17} + a_2 X_{27} + a_3 X_{37} + a_4 X_{47} + a_5 X_{57} + a_6 X_{67} + a_7 X_{77} + a_8 X_{87} + l_7, \\
 Y_8 &= a_0 + a_1 X_{18} + a_2 X_{28} + a_3 X_{38} + a_4 X_{48} + a_5 X_{58} + a_6 X_{68} + a_7 X_{78} + a_8 X_{88} + l_8, \\
 Y_9 &= a_0 + a_1 X_{19} + a_2 X_{29} + a_3 X_{39} + a_4 X_{49} + a_5 X_{59} + a_6 X_{69} + a_7 X_{79} + a_8 X_{89} + l_9, \quad (5.3.1) \\
 Y_{10} &= a_0 + a_1 X_{110} + a_2 X_{210} + a_3 X_{310} + a_4 X_{410} + a_5 X_{510} + a_6 X_{610} + a_7 X_{710} + a_8 X_{810} + l_{10},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{11} &= a_0 + a_1 X_{111} + a_2 X_{211} + a_3 X_{311} + a_4 X_{411} + a_5 X_{511} + a_6 X_{611} + a_7 X_{711} + a_8 X_{811} + l_{11}, \\
Y_{12} &= a_0 + a_1 X_{112} + a_2 X_{212} + a_3 X_{312} + a_4 X_{412} + a_5 X_{512} + a_6 X_{612} + a_7 X_{712} + a_8 X_{812} + l_{12}, \\
Y_{13} &= a_0 + a_1 X_{113} + a_2 X_{213} + a_3 X_{313} + a_4 X_{413} + a_5 X_{513} + a_6 X_{613} + a_7 X_{713} + a_8 X_{813} + l_{13}, \\
Y_{14} &= a_0 + a_1 X_{114} + a_2 X_{214} + a_3 X_{314} + a_4 X_{414} + a_5 X_{514} + a_6 X_{614} + a_7 X_{714} + a_8 X_{814} + l_{14}, \\
Y_{15} &= a_0 + a_1 X_{115} + a_2 X_{215} + a_3 X_{315} + a_4 X_{415} + a_5 X_{515} + a_6 X_{615} + a_7 X_{715} + a_8 X_{815} + l_{15}, \\
Y_{16} &= a_0 + a_1 X_{116} + a_2 X_{216} + a_3 X_{316} + a_4 X_{416} + a_5 X_{516} + a_6 X_{616} + a_7 X_{716} + a_8 X_{816} + l_{16}, \\
Y_{17} &= a_0 + a_1 X_{117} + a_2 X_{217} + a_3 X_{317} + a_4 X_{417} + a_5 X_{517} + a_6 X_{617} + a_7 X_{717} + a_8 X_{817} + l_{17}, \\
Y_{18} &= a_0 + a_1 X_{118} + a_2 X_{218} + a_3 X_{318} + a_4 X_{418} + a_5 X_{518} + a_6 X_{618} + a_7 X_{718} + a_8 X_{818} + l_{18}, \\
Y_{19} &= a_0 + a_1 X_{119} + a_2 X_{219} + a_3 X_{319} + a_4 X_{419} + a_5 X_{519} + a_6 X_{619} + a_7 X_{719} + a_8 X_{819} + l_{19}, \\
Y_{20} &= a_0 + a_1 X_{120} + a_2 X_{220} + a_3 X_{320} + a_4 X_{420} + a_5 X_{520} + a_6 X_{620} + a_7 X_{720} + a_8 X_{820} + l_{20}, \\
Y_{21} &= a_0 + a_1 X_{121} + a_2 X_{221} + a_3 X_{321} + a_4 X_{421} + a_5 X_{521} + a_6 X_{621} + a_7 X_{721} + a_8 X_{821} + l_{21}, \\
Y_{22} &= a_0 + a_1 X_{122} + a_2 X_{222} + a_3 X_{322} + a_4 X_{422} + a_5 X_{522} + a_6 X_{622} + a_7 X_{722} + a_8 X_{822} + l_{22}, \\
Y_{23} &= a_0 + a_1 X_{123} + a_2 X_{223} + a_3 X_{323} + a_4 X_{423} + a_5 X_{523} + a_6 X_{623} + a_7 X_{723} + a_8 X_{823} + l_{23}, \\
Y_{24} &= a_0 + a_1 X_{124} + a_2 X_{224} + a_3 X_{324} + a_4 X_{424} + a_5 X_{524} + a_6 X_{624} + a_7 X_{724} + a_8 X_{824} + l_{24}, \\
Y_{25} &= a_0 + a_1 X_{125} + a_2 X_{225} + a_3 X_{325} + a_4 X_{425} + a_5 X_{525} + a_6 X_{625} + a_7 X_{725} + a_8 X_{825} + l_{25}, \\
Y_{26} &= a_0 + a_1 X_{126} + a_2 X_{226} + a_3 X_{326} + a_4 X_{426} + a_5 X_{526} + a_6 X_{626} + a_7 X_{726} + a_8 X_{826} + l_{26}, \\
Y_{27} &= a_0 + a_1 X_{127} + a_2 X_{227} + a_3 X_{327} + a_4 X_{427} + a_5 X_{527} + a_6 X_{627} + a_7 X_{727} + a_8 X_{827} + l_{27}, \\
Y_{28} &= a_0 + a_1 X_{128} + a_2 X_{228} + a_3 X_{328} + a_4 X_{428} + a_5 X_{528} + a_6 X_{628} + a_7 X_{728} + a_8 X_{828} + l_{28}, \\
Y_{29} &= a_0 + a_1 X_{129} + a_2 X_{229} + a_3 X_{329} + a_4 X_{429} + a_5 X_{529} + a_6 X_{629} + a_7 X_{729} + a_8 X_{829} + l_{29}, \\
Y_{30} &= a_0 + a_1 X_{130} + a_2 X_{230} + a_3 X_{330} + a_4 X_{430} + a_5 X_{530} + a_6 X_{630} + a_7 X_{730} + a_8 X_{830} + l_{30}, \\
Y_{31} &= a_0 + a_1 X_{131} + a_2 X_{231} + a_3 X_{331} + a_4 X_{431} + a_5 X_{531} + a_6 X_{631} + a_7 X_{731} + a_8 X_{831} + l_{31}, \\
Y_{32} &= a_0 + a_1 X_{132} + a_2 X_{232} + a_3 X_{332} + a_4 X_{432} + a_5 X_{532} + a_6 X_{632} + a_7 X_{732} + a_8 X_{832} + l_{32}, \\
Y_{33} &= a_0 + a_1 X_{133} + a_2 X_{233} + a_3 X_{333} + a_4 X_{433} + a_5 X_{533} + a_6 X_{633} + a_7 X_{733} + a_8 X_{833} + l_{33}, \\
Y_{34} &= a_0 + a_1 X_{134} + a_2 X_{234} + a_3 X_{334} + a_4 X_{434} + a_5 X_{534} + a_6 X_{634} + a_7 X_{734} + a_8 X_{834} + l_{34}, \\
Y_{35} &= a_0 + a_1 X_{135} + a_2 X_{235} + a_3 X_{335} + a_4 X_{435} + a_5 X_{535} + a_6 X_{635} + a_7 X_{735} + a_8 X_{835} + l_{35},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{36} &= a_0 + a_1 X_{136} + a_2 X_{236} + a_3 X_{336} + a_4 X_{436} + a_5 X_{536} + a_6 X_{636} + a_7 X_{736} + a_8 X_{836} + l_{36}, \\
Y_{37} &= a_0 + a_1 X_{137} + a_2 X_{237} + a_3 X_{337} + a_4 X_{437} + a_5 X_{537} + a_6 X_{637} + a_7 X_{737} + a_8 X_{837} + l_{37}, \\
Y_{38} &= a_0 + a_1 X_{138} + a_2 X_{238} + a_3 X_{338} + a_4 X_{438} + a_5 X_{538} + a_6 X_{638} + a_7 X_{738} + a_8 X_{838} + l_{38}.
\end{aligned}$$

Або в матричній формі

$$Y = Xa + l, \quad (5.3.2)$$

де  $Y$  - вектор-стовпець экзаменаційних оцінок по 100-бальній шкалі EST

.....(5.3.3)

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ Y_{38} \end{pmatrix}$$

$X$  – матриця експертних оцінок студентів проведеного анкетування після здачі екзамену

$$X = \begin{pmatrix} X_0 & X_{11} & X_{21} & X_{31} & \dots & X_{81} \\ X_0 & X_{12} & X_{22} & X_{32} & \dots & X_{82} \\ X_0 & X_{13} & X_{23} & X_{33} & \dots & X_{83} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_0 & X_{138} & X_{238} & X_{338} & \dots & X_{838} \end{pmatrix},$$

.....(5.3.4)

$X_0$  – фіктивний фактор, всі значення якого дорівнюють одиниці.

Досліджувані фактори:  $X_1$  - інтерес до вивчення дисципліни (0-5 балів);

$X_2$  - оцінка студентами роботи викладача (0-5 балів);

.... $X_3$  - трудність вивчення дисципліни (0-5 балів);

$X_4$  - елементи наукового пошуку (0-5 балів);

$X_5$  - зв'язок зі спеціальністю (0-5 балів);

$X_6$  - степінь самостійності в написанні першої монографії (0-5балів);

$X_7$  - степінь самостійності в написанні другої монографії (0-5балів);

$X_8$  - оцінка студентами створеної наукової школи (0-5 балів).

Другим індексом позначений номер студента в загальному списку. Всього в експерименті приймало участь 38 студентів.

$\alpha$  – вектор-стовпець невідомих коефіцієнтів емпіричної формули

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \alpha_8 \end{bmatrix} \quad (5.3.5)$$

$l$  – вектор-стовпець відхилень фактичних даних від розрахункових

$$l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ l_{38} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(5.3.6)$$

Так як

$$l = Y - Xa, \dots\dots\dots(5.3.7)$$

то функціонал Q буде

$$Q(a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_8) = \sum_{i=1}^{38} l_i^2, \dots\dots\dots(5.3.8)$$

тобто

$$\sum_{i=1}^{38} l_i^2 = l^T l = [Y - [X]a]^T [Y - [X]a], \dots\dots\dots(5.3.9)$$

або

$$\sum_{i=1}^{38} l_i^2 = Y^T Y - Y^T [X]a - a^T [X]^T Y + a^T [X]^T [X]a, \dots\dots\dots(5.3.10)$$

i

...5.3.11)

$$\sum_{i=1}^{38} l_i^2 = Y^T Y - 2a^T [X]^T Y + a^T [X]^T [X] a .$$

Для функціонала  $Q(a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \dots a_8)$  в точці екстремуму виконується умова

$$\frac{dQ}{da^T} = 0. \dots\dots\dots(5.3.12)$$

З цієї умови отримаємо

$$\frac{dQ}{da^T} = -2[X]^T Y + 2[X]^T [X] a \Rightarrow [X]^T [X] a = [X]^T Y. \dots\dots\dots(5.3.13)$$

Домножуючи зліва останнє матричне рівняння на матрицю обернену матриці

$[X]^T [X]$ , отримаємо шуканий вектор **a**

$$a = \left[ [X]^T [X] \right]^{-1} [X]^T Y, \dots\dots\dots(5.3.14)$$

де

$$[X]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ X_{11} & X_{12} & X_{13} & \dots & X_{138} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & \dots & X_{238} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & \dots & X_{338} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{81} & X_{82} & X_{83} & \dots & X_{838} \end{bmatrix} \quad (5.3.15)$$

В умовах нашого експерименту транспонована матриця початкових умовних рівнянь має вигляд





1	1	5	5	4	4	4	5	5	5
2	1	5	5	5	5	5	5	5	5
3	1	5	5	5	5	5	5	5	5
4	1	5	5	3	5	5	5	5	5
5	1	4	4	3	4	4	5	4	5
6	1	5	5	3	4	5	5	5	5
7	1	5	5	5	5	5	5	5	5
8	1	5	5	2	5	5	5	5	5
9	1	5	5	5	5	5	5	5	5
10	1	4	5	4	5	4	5	0	5
11	1	5	5	5	5	5	5	5	5
12	1	4	5	4	5	4	0	0	4
13	1	4	5	4	4	4	5	4	5
14	1	5	5	3	5	5	5	5	5
15	1	5	5	4	3	5	5	5	5
16	1	5	5	4	4	5	5	5	5
17	1	4	5	4	4	4	5	5	5
18	1	5	5	5	5	5	4	5	5
19	1	5	5	3	5	5	4	0	5
20	1	5	5	3	5	5	5	5	5
21	1	5	5	5	5	5	5	5	5
22	1	5	5	4	4	5	5	5	5
23	1	4	5	4	4	4	5	4	4
24	1	5	5	3	5	5	5	5	5
25	1	5	5	3	5	5	5	5	5
26	1	5	5	4	4	5	5	5	5
27	1	5	5	3	5	5	5	5	5
28	1	5	5	5	5	5	5	5	5

29	1	5	5	3	5	5	5	5	5
30	1	4	5	5	5	5	5	5	5
31	1	5	5	3	5	5	5	5	5
32	1	4	5	4	5	5	5	5	5
33	1	5	5	5	5	5	5	5	5
34	1	5	5	3	5	5	5	5	5
35	1	5	5	3	5	5	5	5	5
36	1	5	5	5	5	5	5	5	5
37	1	5	5	3	4	5	5	5	4
38	1	5	5	5	5	5	5	5	5

$$N = [X]^T X, \quad (5.3.17)$$

або

$$N = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_{1i} & \sum_{i=1}^n X_{2i} & \sum_{i=1}^n X_{3i} & \dots & \sum_{i=1}^n X_{mi} \\ \sum_{i=1}^n X_{1i} & \sum_{i=1}^n X_{1i}^2 & \sum_{i=1}^n X_{1i}X_{2i} & \sum_{i=1}^n X_{1i}X_{3i} & \dots & \sum_{i=1}^n X_{1i}X_{mi} \\ \sum_{i=1}^n X_{2i} & \sum_{i=1}^n X_{2i}X_{1i} & \sum_{i=1}^n X_{2i}^2 & \sum_{i=1}^n X_{2i}X_{3i} & \dots & \sum_{i=1}^n X_{2i}X_{mi} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n X_{mi} & \sum_{i=1}^n X_{mi}X_{1i} & \sum_{i=1}^n X_{mi}X_{2i} & \sum_{i=1}^n X_{mi}X_{3i} & \dots & \sum_{i=1}^n X_{mi}^2 \end{bmatrix} \quad (5.3.18)$$

І в нашому випадку, ми отримали

Таблиця 5.3.3. Матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь N

38	182	189	148	178	183	183	172	187
182	878	906	708	854	881	880	833	897
189	906	941	737	886	911	910	856	930
148	708	737	606	695	713	712	674	729
178	854	886	695	844	860	855	803	877
183	881	911	713	860	887	885	838	902
183	880	910	712	855	885	907	855	905
172	833	856	674	803	838	855	848	851
187	897	930	729	877	902	905	851	923

Вектор вільних членів розраховується за формулою

$$\ell = [X]^T Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ X_{11} & X_{12} & X_{13} & \dots & X_{138} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & \dots & X_{238} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & \dots & X_{338} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{81} & X_{82} & X_{83} & \dots & X_{838} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \dots \\ Y_{38} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{38} Y_i \\ \sum_{i=1}^{38} Y_i X_{1i} \\ \sum_{i=1}^{38} Y_i X_{2i} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{38} Y_i X_{8i} \end{bmatrix} \quad (5.3.19)$$

При цьому вектор факторних ознак

№п.п..	Екз.оц.
	У
1	100
2	90
3	90
4	100
5	89
6	89
7	95
8	100
9	90
10	89
11	100
12	80
13	89
14	90
15	100
16	90
17	100
18	100
19	77
20	77
21	100
22	100
23	90
24	100
25	100
26	100
27	100
28	100
29	100
30	85
31	90
32	90
33	86
34	86
35	100
36	90
37	95
38	100

Σ	3547
---	------

І в нашому випадку вектор вільних членів  
Таблиця 5.3.4. Вектор вільних членів нормальних рівнянь

3547
17023
17646
13821
16593
17098
17158
16237
17470

Представимо формулу (5.3.14) у вигляді

$$a = [N]^{-1} * l, \tag{5.3.20}$$

де обернена матриця до матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь має вигляд

$$N^{-1} = \left[ \begin{matrix} [X]^T & [X] \end{matrix} \right]^{-1}, \tag{5.3.21}$$

вектор вільних членів

$$\dots\dots\dots l = [X]^T Y.$$

Обернену матрицю знаходимо в MS Excel за формулою

$$=МОБР(A54:I62).....\tag{5.3.23}$$

В нашому випадку матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь знаходиться в діапазоні (A54:I62). Попередньо виділивши масив під обернену матрицю, натиском клавіш F2 , Ctrl +Shift + Enter , отримали

Таблиця 5.3.5. Обернена матриця  $N^{-1}$

			-						-
37,609	0,1742	5,8644	0,0979	0,0974	0,3073	0,1095	0,0332	2,4886	-
93079	9873	44295	10912	4857	94507	80929	35048	59681	-
			-						-
0,1742	0,3990	0,1212	0,0195	0,0320	0,2847	0,0147	0,0132	0,0708	-
9873	89485	36141	237	38288	90668	85251	17014	66377	-
			-						-
5,8644	0,1212	1,3190	0,0467	0,0398	0,1428	0,0090	0,0186	0,1830	-
44295	36141	23213	86832	5332	07802	81906	36552	32862	-
			-						-
0,0979	0,0195	0,0467	0,0376	0,0049	0,0037	0,0079	0,0067	0,0219	-
10912	237	86832	81079	25145	87794	32749	76924	81654	-
			-						-
0,0974	0,0320	0,0398	0,0049	0,1412	0,1069	0,0210	0,0131	0,0693	-
4857	38288	5332	25145	04237	27314	52276	88052	06857	-
			-						-
0,3073	0,2847	0,1428	0,0037	0,1069	0,5512	0,0035	0,0381	0,0430	-
94507	90668	07802	87794	27314	23037	62341	499	27119	-
			-						-
0,1095	0,0147	0,0090	0,0079	0,0210	0,0035	0,0863	0,0269	0,1100	-
80929	85251	81906	32749	52276	62341	86633	7821	34524	-
			-						-
0,0332	0,0132	0,0186	0,0067	0,0131	0,0381	0,0269	0,0316	0,0147	-
35048	17014	36552	76924	88052	499	7821	23978	3202	-
			-						-
2,4886	0,0708	0,1830	0,0219	0,0693	0,0430	0,1100	0,0147	0,6093	-
59681	66377	32862	81654	06857	27119	34524	3202	03828	-

Перемноживши обернену матрицю на вектор вільних членів, за формулою (5.3.20) отримали

Таблиця 5.3.5. Вектор шуканих коефіцієнтів

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$$

54,492284	X0
5,747557	X1
5,200595	X2
-0,073811	X3
-0,967014	X4
-6,978379	X5
0,037116	X6
2,585372	X7
2,438210	X8

Коефіцієнти емпіричної формули побудованої математичної моделі базової дисципліни в рамках функціонування математичної школи розраховувались в MS Excel за формулою

$$=МУМНОЖ(А66:І74;К54:К62). \quad (5.3.24)$$

При цьому обернена матриця знаходилась в діапазоні (А66:І54), а вектор вільних членів розміщувався в діапазоні (К54:К62). Попередньо виділивши масив під вектор коефіцієнтів математичної моделі, натиском клавіш F2, Ctrl + Shift + Enter, отримали вище приведені значення, на основі чого представляємо математичну модель базової дисципліни в рамках функціонування математичної школи

$$Y' = 54.492284X_0 + 5.747557X_1 + 5.200595X_2 - 0.073811X_3 - 0.967014X_4 - 6.978379X_5 + 0.037116X_6 + 2.585372X_7 + 2.438210X_8. \quad (5.3.24)$$

## 5.4. Контроль процедури зрівноваження

Контроль процедури зрівноваження виконується за формулою

$$\begin{aligned} & [YY] - a_0[Y] - a_1[YX_1] - a_2[YX_2] - a_3[YX_3] - a_4[YX_4] - \\ & - a_5[YX_5] - a_6[YX_6] - a_7[YX_7] - a_8[YX_8] = [VV] \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

У формулі (5.4.1) символом [ ] позначені суми за Гаусом.

Розрахунок був проведений в MS Excel за формулою  
=P40-МУМНОЖ(М67:U67;K54:K62) (5.4.2)

В чарунку P40 знаходилася сума квадратів [YY], в діапазоні (М67:U67) знаходилися значення  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_8$ , в діапазоні (K54:K62) знаходилися вільні члени нормальних рівнянь.

В матричній формі запис формули контролю зрівноваження буде

$$[Y^T Y] - \ell K^T = [V^T V] \quad (5.4.3)$$

В нашому випадку отримали

$$\begin{aligned} [Y^T Y] - \ell K^T &= 1185,606675, \\ [V^T V] &= 1185,606675. \end{aligned}$$

Різниця між даними числами склала 2,00939E-08, що говорить про коректність процедури зрівноваження в цілому.

Другим контролем процедури зрівноваження був розрахунок за формулою



$$= \text{ЛИНЕЙН}(A2:A39;C2:J39;1;1) \quad (5.4.4)$$

Діапазоном (A2:A39) відмічені екзаменаційні оцінки, діапазоном (C2:J39) відмічені результати експертних оцінок студентів.

В строчці (1) приведені коефіцієнти моделі, які повністю співпадають з відповідними коефіцієнтами в отриманій нами формулі (5.3.24) математичної моделі базової дисципліни в рамках функціонування математичної школи .

В другій строчці приведені середні квадратичні похибки (стандарт) даних коефіцієнтів.

Як видно із табл.5.4.1 , лише для коефіцієнтів  $a_7, a_5, a_1$  і  $a_0$  середні квадратичні похибки менші самих коефіцієнтів.

Таблиця 5.4.1. Другий контроль процедури зрівноваження

	a8	a7	a6	a5	a4	a3
1	2,438209 57	2,5853717 32	0,0371164 49	6,9783791 1	0,9670148 7	0,0738125 7
2	4,99100807 3	1,1370500 15	1,8792934 17	4,7471723 44	2,4026758 46	1,2411748 94
3	0,35019321 7	6,3939806 69	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д
4	1,95358135 3	29	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д
5	638,945956 4	1185,6066 75	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д

Продовження таблиці 5.4.1.

	a2	a1	a0		
1	5,20059 521	5,7475568 33	54,492283 77	=ai	
2	27,3434 0597	4,0393032 75	39,212324 33S	стандарт	ai=S√dii

3	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	$R^2$	$m1=\mu$
4	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	Фкритерій	$n-m-1$
5	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	$[(Y'-Y_{cp})^2]$	$[VV]=Y'-Y$

Розраховуючи зрівноважені значення  $\tilde{Y}$ , отримали

Y'зрівн.
102,459713
94,4405075
94,4405075
94,58813
89
95,5551444
94,4405075
94,6619412
94,4405075
82,8182826
94,4405075
80,1944908
94,126784
94,58813
96,4483475
95,4813331
96,7121557
94,403391
81,6241549
94,58813
94,4405075
95,4813331
91,6885744
94,58813
94,58813
95,4813331
94,58813
94,4405075
94,58813

88,6929506
94,58813
88,7667619
94,4405075
94,58813
94,58813
94,4405075
93,1169348
94,4405075
3547

### 5.5. Дослідження матриці на невиродженість

Спочатку ми стверджуємо теорему 1.

**Система рівнянь не має рішення в тому і тільки в тому випадку, коли визначник оберненої матриці нормальних рівнянь дорівнює абсолютному нулю. У всіх інших випадках система має рішення.**

Існує думка, що коли визначник оберненої матриці близький до нуля, то рішення системи рівнянь не існує.

І дійсно, при розрахунку на калькуляторах, або при заданому числу значущих цифр, рівних 5 або 6 знаків на персональному комп'ютері, визначник буде дорівнювати нулю, а згідно головного правила математики «Не діли на нуль», система рівнянь не буде мати розв'язку.

Навіть при рішенні нормальних рівнянь на персональному комп'ютері по розробленій автором програмі, комп'ютер видавав помилку і відмовлявся виконувати таку програму. В роботі Дьяконова В.П. "Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ", М:Наука, 1989, -240с, приведена програма наближеного обчислення системи лінійних рівнянь з виродженою матрицею.

При цьому система рівнянь

$$\dots\dots\dots CX = D, \quad (5.5.1)$$

де  $C$  – вироджена матриця, наближено рiшається, якщо припустити, що  $C_{ij}$  i  $d_i$  заданi з деяким  $t$ -наближенням. Тодi, цю систему можна звести до рiшення системи

$$AX = B, \quad (5.5.2.2)$$

так, що

$$|C_{ij} - a_{ij}| \leq t, \dots\dots\dots (5.5.2.3)$$

$$|b_{ij} - d_{sj}| \leq t, \quad \dots\dots\dots (5.5.2.4)$$

$$\dots\dots\dots 0 < t \leq 0.000000001.$$

Для рiшення обчислюється параметр

$$\alpha = 0,5\sqrt{Nt}. \dots\dots\dots (5.5.2.5)$$

За незалежнi приймаються компоненти вектора  $X_n$ , який отримують рiшенням системи слiдуючого виду

$$[(A^T A + \alpha E)] * [X_\alpha] = [A^T B] \quad \dots\dots\dots (5.5.2.6)$$

методм квадратних коренiв.

Слiд вiдмiтити, що при розрахунку за вбудованими операторами в MS Excel забезпечується точнiсть до 17 знакiв i ця проблема вирiшується.

Так, в нашому випадку, при 8 факторах i педагогiчному експериментi (на вiдмiну вiд активного експерименту, наприклад, в ядернiй фiзицi), нами отримано значення

37,60993079	0,17429873	-5,864444295	0,097910912	0,09744857	0,307394507	0,109580929	0,032325048	-2,488659681
0,17429873	0,399089485	-0,121236141	0,0195237	0,032038288	-0,284790668	0,014785251	-0,013217014	-0,070866377
-5,864444295	-0,121236141	1,319023213	-0,046786832	-0,03985332	-0,142807802	-0,009081906	0,018636552	0,183032862
0,097910912	0,0195237	-0,046786832	0,037681079	-0,004925145	0,003787794	0,007932749	-0,006776924	-0,021981654
0,09744857	0,032038288	-0,03985332	-0,004925145	0,141204237	-0,106927314	0,021052276	0,013188052	-0,069306857
0,307394507	-0,284790668	-0,142807802	0,003787794	-0,106927314	0,551223037	-0,003562341	-0,0381499	-0,043027119
0,109580929	0,014785251	-0,009081906	0,007932749	0,021052276	-0,003562341	0,086386633	-0,02697821	-0,110034524
0,032325048	-0,013217014	0,018636552	-0,006776924	0,013188052	-0,0381499	-0,02697821	0,031623978	0,01473202
-2,488659681	-0,070866377	0,183032862	-0,021981654	-0,069306857	-0,043027119	-0,110034524	0,01473202	0,609303828

$\Delta =$

визначника  
 $\Delta = 0,000000007$   
, що не  
зашкодило  
рішити  
систему  
рівнянь.

$\Delta$   
 $= 0,0000000075$   
 $= 7,534420E-09.$

Цікаво відмітити, що взявши лише три фактори, визначник оберненої матриці такої системи мав значення  $\Delta = 0,0000048087$ , тобто число нулів зменшилось на три знаки.

Але це не значило, що похибки зрівноважених значень були меншими ніж в попередньому випадку.

На основі табл.5.3.5. , де приведено рішення нормальних рівнянь, що доказує теорему1.

Констатуємо:

Таким чином, система рівнянь не має рішення в тому і тільки в тому випадку, коли визначник оберненої матриці нормальних рівнянь дорівнює абсолютному нулю. У всіх інших випадках система має рішення. **Теорема доказана.**

## **5.6. Дослідження точності елементів зрівноваженої моделі**

### **5.6.1. Дослідження коефіцієнта множинної кореляції**

Одним із основних показників щільності кореляційного зв'язку показника  $Y$  з факторами  $X_i$  ( $i=1,1,\dots,m$ ), а також показника ступеня близькості математичної форми

зв'язку до вибірових даних є коефіцієнт множинної кореляції.

Відношення суми квадратів центрованих теоретичних значень показника до суми квадратів центрованих вибірових значень показника

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\tilde{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (5.6.1)$$

називається вибіровим коефіцієнтом множинної детермінації.

Враховуючи властивість

$$\sum_{i=1}^n (\tilde{Y}_i - \bar{Y})^2 = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 - \sum \ell_i^2, \quad (5.6.2)$$

вибіровий коефіцієнт множинної детермінації запишемо у вигляді

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 - \sum_{i=1}^n \ell_i^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}, \quad (5.6.3)$$

або

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \ell_i^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}, \quad (5.6.4)$$

де  $\tilde{Y}$  – зрівноважене значення екзаменаційної оцінки;  
 $\bar{Y}$  – середнє арифметичне значення,  
 $Y_i$  – екзаменаційна оцінка конкретного студента.

Із наведеної формули випливає, що коли

$$\sum \ell_i^2 = 0, \text{ то } R^2 = 1, \text{ тобто якщо всі вибіркві}$$

значення показника розміщені на лінії регресії, то коефіцієнт множинної детермінації дорівнює 1. Чим ближче вибіркві (експериментальні) значення наближаються до лінії регресії, тим ближче коефіцієнт вибіркової множинної детермінації наближається до 1.

Корінь квадратний із вибіркового коефіцієнта множинної детермінації є коефіцієнтом множинної

кореляції 
$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \tilde{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}} \dots \dots \dots (5.6.5)$$

Коефіцієнт множинної кореляції є оцінкою близькості математичної форми зв'язку до вибірквих даних.

Приймаючи до уваги, що

$$\sum_{i=1}^n \ell_i^2 = \ell^T \ell = [Y - [X]a]^T [Y - [X]a], \quad (5.6.6)$$

або

$$\sum_{i=1}^n \ell_i^2 = Y^T Y - 2a^T [X]^T Y + a^T [X]^T [X]a. \quad (5.6.7)$$

Тоді

$$\sum_{i=1}^n \ell_i^2 = Y^T Y - a^T [X]^T Y \Rightarrow \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 - \sum_{i=1}^n \ell_i^2. \quad (5.6.8)$$

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 - \sum_{i=1}^n \ell_i^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\bar{Y}^2 - \sum_{i=1}^n \ell_i^2. \quad (5.6.9)$$

А

$$\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\bar{Y}^2 - \sum_{i=1}^n \ell_i^2 = Y^T Y - (Y^T Y - a^T [X]^T Y) - n\bar{Y}^2. \quad (5.6.10)$$

Або



$$Y^T Y - (Y^T Y - a^T [X^T] Y) - n\bar{Y}^2 = a^T [X]^T Y - n\bar{Y}^2 \dots\dots (5.6.11)$$

Тоді

$$a^T [X]^T Y - n\bar{Y}^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{a^T [X]^T Y - n\bar{Y}^2}{Y^T Y - n\bar{Y}^2}} \dots\dots (5.6.12)$$

Приведемо порівняльну таблицю за результатами зрівноваження.

Таблиця 5.6.1. Порівняльна таблиця за результатами зрівноваження

Екз. оцін. Y	Y'зрівн.	V=Y'-Y	V^2	y^2	(Y'-Y <sub>ср</sub> )^2	(Y'-Y <sub>ср</sub> )^2	Y <sub>ср</sub> .
100	102,4597 13	2,459712 52	6,05018 57	10000	44,3275 62	83,1307 6	93,3421 05
90	94,44050 75	4,440507 46	19,7181 07	8100	11,1696 68	1,20648 7	93,3421 05
90	94,44050 75	4,440507 46	19,7181 07	8100	11,1696 68	1,20648 7	93,3421 05
100	94,58813	-5,41187	29,2883 37	10000	44,3275 62	1,55257 8	93,3421 05
89	89	-1,933E- 12	3,735E- 24	7921	18,8538 78	18,8538 8	93,3421 05
89	95,55514 44	6,555144 36	42,9699 18	7921	18,8538 78	4,89754 2	93,3421 05
95	94,44050 75	0,559492 5	0,31303 19	9025	2,74861 5	1,20648 7	93,3421 05
100	94,66194 12	5,338058 8	28,4948 71	10000	44,3275 62	1,74196 7	93,3421 05
90	94,44050 75	4,440507 46	19,7181 07	8100	11,1696 68	1,20648 7	93,3421 05
89	82,81828 26	6,181717 4	38,2136 3	7921	18,8538 78	110,750 8	93,3421 05
100	94,44050 75	5,559492 5	30,9079 57	10000	44,3275 62	1,20648 7	93,3421 05

80	80,19449 08	0,194490 82	0,03782 67	6400	178,011 77	172,859 8	93,3421 05
89	94,12678 4	5,126783 95	26,2839 14	7921	18,8538 78	0,61572 1	93,3421 05
90	94,58813	4,588129 98	21,0509 37	8100	11,1696 68	1,55257 8	93,3421 05
100	96,44834 75	3,551652 5	12,6142 36	10000	44,3275 62	9,64874 1	93,3421 05
90	95,48133 31	5,481333 11	30,0450 13	8100	11,1696 68	4,57629 6	93,3421 05
100	96,71215 57	3,287844 3	10,8099 2	10000	44,3275 62	11,3572 4	93,3421 05
100	94,40339 1	-5,596609	31,3220 32	10000	44,3275 62	1,12632 7	93,3421 05
77	81,62415 49	4,624154 87	21,3828 08	5929	267,064 4	137,310 4	93,3421 05
77	94,58813	17,58813	309,342 32	5929	267,064 4	1,55257 8	93,3421 05
100	94,44050 75	5,559492 5	30,9079 57	10000	44,3275 62	1,20648 7	93,3421 05
100	95,48133 31	4,518666 9	20,4183 5	10000	44,3275 62	4,57629 6	93,3421 05
90	91,68857 44	1,688574 38	2,85128 34	8100	11,1696 68	2,73416 4	93,3421 05
100	94,58813	-5,41187	29,2883 37	10000	44,3275 62	1,55257 8	93,3421 05
100	94,58813	-5,41187	29,2883 37	10000	44,3275 62	1,55257 8	93,3421 05
100	95,48133 31	4,518666 9	20,4183 5	10000	44,3275 62	4,57629 6	93,3421 05
100	94,58813	-5,41187	29,2883 37	10000	44,3275 62	1,55257 8	93,3421 05
100	94,44050 75	5,559492 5	30,9079 57	10000	44,3275 62	1,20648 7	93,3421 05

100	94,58813	-5,41187	29,2883 37	10000	44,3275 62	1,55257 8	93,3421 05
85	88,69295 06	3,692950 63	13,6378 84	7225	69,5907 2	21,6146 4	93,3421 05
90	94,58813	4,588129 98	21,0509 37	8100	11,1696 68	1,55257 8	93,3421 05
90	88,76676 19	1,233238 1	1,52087 62	8100	11,1696 68	20,9337 7	93,3421 05
86	94,44050 75	8,440507 46	71,2421 66	7396	53,9065 1	1,20648 7	93,3421 05
86	94,58813	8,588129 98	73,7559 77	7396	53,9065 1	1,55257 8	93,3421 05
100	94,58813	-5,41187	29,2883 37	10000	44,3275 62	1,55257 8	93,3421 05
90	94,44050 75	4,440507 46	19,7181 07	8100	11,1696 68	1,20648 7	93,3421 05
95	93,11693 48	1,883065 2	3,54593 46	9025	2,74861 5	0,05070 2	93,3421 05
100	94,44050 75	5,559492 5	30,9079 57	10000	44,3275 62	1,20648 7	93,3421 05
354 7	3547	-2,152E- 10	1185,60 67	33290 9	1824,55 26	638,946	
[Y]	[Y']	V=Y'-Y	[V <sup>2</sup> ]	[Y <sup>2</sup> ]	[(Y- Y <sub>ср</sub> ) <sup>2</sup> ]	[(Y'- Y <sub>ср</sub> ) <sup>2</sup> ]	

На основі даних табл.5.6.1, за формулою 5.6.4, знайдемо вибірковий коефіцієнт множинної детермінації

$$R^2 = 1 - \frac{1185.6067}{1824.5526} = 1 - 0.64981 = 0.35019.$$

Коефіцієнт множинної кореляції при цьому

$$R = \sqrt{R^2} = \sqrt{0.35019} = 0.592.$$

В педагогіці і психології використовуються дві системи класифікації кореляційних зв'язків по їх силі-загальна і часткова.

Загальна класифікація кореляційних зв'язків (по Івантер Е.В., Коросову А.В., 1992):

- 1) сильна, або тісна при коефіцієнті кореляції  $R \geq 0.70$ ;
- 2) середня.....при коефіцієнті кореляції  $0,50 < R < 0.69$ ;
- 3) помірною.....при коефіцієнті кореляції  $0,30 < R < 0.49$ ;
- 4) слабка при коефіцієнті кореляції  $0,20 < R < 0.29$ ;
- 5) дуже слабка при коефіцієнті кореляції  $R < 0.19$ .

Часткова класифікація кореляційних зв'язків:

- 1) висока значима кореляція при  $R$ , що відповідає рівню статистичної значимості  $P \leq 0.01$ ;
- 2) значима кореляція при  $R$ , що відповідає рівню статистичної значимості  $P \leq 0.05$ ;
- 3) тенденція достовірного зв'язку при  $R$ , що відповідає рівню статистичної значимості  $P \leq 0.10$ ;
- 4) незначима кореляція при  $R$ , що не досягає рівня статистичної значимості .

Слід відмітити, що ці дві класифікації не співпадають. Перша орієнтована тільки на величину коефіцієнта кореляції, а друга визначає, якого рівня значимості досягає дана величина коефіцієнта кореляції при заданому об'ємі вибірки. Чим більший об'єм вибірки, тим меншої величини коефіцієнта кореляції достатньо, щоб кореляція була признана достовірною.

І навіть при малому об'ємі вибірки може бути так, що сильна кореляція виявиться недостовірною.

Таким чином, коефіцієнт  $R$  відповідає середньому рівню кореляції  $0,50 < R_{0.05} < 0.69$ , забезпечуючи рівень статистичної значимості  $P \leq 0.05$ .

Статистичну значущість коефіцієнта детермінації можна перевірити за допомогою  $F$ -статистики

$$F_R = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m}{m-1}, \dots\dots\dots(5.6.13)$$

де  $R^2$  – коефіцієнт детермінації,  $n$  – число періодів, що спостерігаються,  $m$  – число параметрів рівняння регресії.

Для заданої надійності  $p$  і ступенів вільності

$k_1 = m, k_2 = n - m$  знаходимо в таблиці F-статистики критичне значення  $F_{p,k_1,k_2}$ .

Якщо  $F_R > F_{p,k_1,k_2}$ , то з надійністю  $p$  можна вважати, що коефіцієнт детермінації статистично значимий і включені у регресію фактори достатньо пояснюють стохастичну залежність показника.

Критерій Фішера можна розрахувати за формулою

$$F_{розр} = \frac{S_{\tilde{Y}}^2}{S^2}, \dots\dots\dots(5.6.14)$$

..... де  $S_{Y_{зрівн.}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{зрівн.} - \bar{Y})^2}{m}, \dots\dots\dots(5.6.15)$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{зрівн.} - Y)^2}{n - m - 1}, \quad (5.6.16)$$

Необхідно відмітити, що за формулою (5.6.16) розраховується дисперсія по квадратам відхилень зрівноважених значень  $\tilde{Y}$  від їх експериментальних значень. Квадратний корінь із цієї дисперсії і буде середня квадратична похибка одиниці ваги- дуже важлива характеристика оцінки точності зрівноважених елементів.

На основі даних табл.5.6.1, запишемо

$$S^2 = \frac{1185,6067}{38 - 8 - 1} = 40.8830.$$

Тоді, середня квадратична похибка одиниці ваги  $\mu$  буде дорівнювати

$$\mu = \sqrt{S^2} = \sqrt{40.8830} = 6.39398.$$

Аналогічна характеристика приведена в третій стрічці другого стовпчика табл.5.4.1.

А це означає, що середня квадратична похибка виставлення екзаменаційних оцінок по 100 бальній шкалі EST становить 6,39 бали, тобто похибка складає 6,39 %.

На жаль, ні одна стандартна комп'ютерна програма не дає можливості відповісти на питання, чому дорівнює середня квадратична похибка екзаменаційної оцінки для конкретного студента. Дану проблему ми вирішимо нижче.

Розрахуємо дисперсію за формулою (5.6.15) по відхиленням зрівноважених значень від середнього значення  $\bar{Y}$  на основі даних табл.5.6.1.

$$S_{Y_{зрівн.}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{зрівн.} - \bar{Y})^2}{m} = \frac{638,94595}{8} = 79,8682 ,$$

При цьому розрахунковий критерій Фішера буде

$$F_{розр} = \frac{S_{\bar{Y}}^2}{S^2} = \frac{79,8682}{40,8830} = 1,95358,$$

аналогічна характеристика приведена в четвертій стрічці першого стовпчика табл.5.4.1.

За формулою (5.6.13) отримаємо

$$F_R = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m}{m - 1} = \frac{0,3501932(38 - 8 - 1)}{(1 - 0,3501932) * 8} = 1,953581.$$

Знайдемо допустиме значення  $F_{\text{дон}}$  для 5% діапазону за формулою

$$= \text{FPACПOБP}(0.05;8;29)\text{ENTER} \dots\dots(5.6.17)$$

В результаті комп'ютерного розрахунку, отримуємо  $F_{\text{дон}} = 2,27851$ .

Як бачимо, в нашому випадку,  $F_{\text{розр}} < F_{\text{дон}}$ . Тобто, при побудові математичної моделі з 8 факторами, у нас не забезпечується 95% вірогідність результатів. Для 91%, отримаємо

$$= \text{FPACПOБP}(0.09;8;29)\text{ENTER} \dots\dots(5.6.18)$$

$$\dots\dots\dots F_{\text{дон}} = 1,950589.$$

Тобто,  $F_{\text{розр}} > F_{\text{дон}}$  і ми з надійністю 91% можемо вважати, що коефіцієнт детермінації статистично значимий і включені у регресію фактори достатньо пояснюють залежність показника.

### **5.6.2. Встановлення надійних інтервалів базисних даних та прогнозу**

Встановивши середню квадратичну похибку одиниці ваги зрівноважених елементів, провівши точкову оцінку прогнозу та оцінивши параметри лінійної множинної регресії, необхідно встановити надійну зону для базисних значень і надійного інтервалу для прогнозу.

Наше рівняння регресії з оціненими параметрами має вигляд

$$\tilde{Y} = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5 + a_6 X_6 + a_7 X_7 + a_8 X_8. \quad (5.6.19)$$

Так як  $a_i (i=0,1,2,\dots,m=8)$  – випадкова величина, то  $\tilde{Y}$  також є випадковою величиною. Для визначення надійного інтервалу необхідно знайти оцінку дисперсії випадкової величини  $\tilde{Y}$ .

Дисперсія лінійної функції визначається за формулою

$$D[\tilde{Y}] = D[a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5 + a_6 X_6 + a_7 X_7 + a_8 X_8],$$

або

$$D[\tilde{Y}] = D[a_0] + X_1^2 D[a_1] + X_2^2 D[a_2] + \dots + X_m^2 + 2 \sum_{i>j} X_i X_j K[a_i a_j] \quad (5.6.20)$$

де  $K[a_i a_j]$  – кореляційний момент величин  $a_i, a_j$ .

Нехай, необхідно знайти надійний інтервал для вектора

$$X_l = [1, X_{1l}, X_{2l}, \dots, X_{ml}]$$

Тоді дисперсія

$$D[\tilde{Y}] = X_l [K[a]] X_l^T, \text{ де } K[a] \text{ – матриця}$$

коваріацій оцінок.

При цьому

$$[K[a]] = S^2 [X^T [X]]^{-1}. \quad (5.6.21)$$

Оцінка дисперсії  $\tilde{Y}$  для лінійної множинної регресії має вигляд



$$D[\tilde{Y}_l] = S_{\tilde{Y}_l}^2 = S^2 X_l^T [X^T X]^{-1} X_l. \quad (5.6.22)$$

Тоді з надійністю  $p = 1 - \alpha$  можна стверджувати, що істинне значення для базисних даних міститься в інтервалі

$$(\tilde{Y}_l - t_{\alpha,k} S_{\tilde{Y}_l}; \tilde{Y}_l + t_{\alpha,k} S_{\tilde{Y}_l}).$$

Нехай, прогноз міститься у точці  $X_l = [1, X_{1l}, X_{2l}, \dots, X_{ml}]$ . При цьому необхідно врахувати дисперсію відхилення від лінії регресії, тобто

$$D[\tilde{Y}_p] = S^2 \left( X_p [X^T X]^{-1} X_p^T + 1 \right). \quad (5.6.23)$$

Звідси випливає, що з надійністю  $p = 1 - \alpha$  можна стверджувати, що істинне значення прогнозу  $Y_p$  міститься в інтервалі  $(\tilde{Y}_p - t_{\alpha,k} S_{\tilde{Y}_p}; \tilde{Y}_p + t_{\alpha,k} S_{\tilde{Y}_p})$ .

Таким чином, значимість коефіцієнта регресії  $a_j$  можна перевірити, якщо прийняти до уваги що статистика  $(a_j - \alpha_j) / S_{aj}$  має t-розподіл Стьюдента з  $k = n - m - 1$  степенями свободи.

Тому,  $a_j$  значимо відрізняється від нуля (в противному випадку гіпотеза  $H_0$  про рівність параметра  $\alpha_j$  нулю, тобто  $H_0: \alpha_j = 0$  відкидається) на рівні значимості  $\alpha$ , якщо

$$|t| = \frac{a_j}{S_{aj}} > t_{1-\alpha; n-m-1}, \quad (5.6.24)$$

де  $t_{1-\alpha;n-m-1}$  - табличне значення t- критерія Стьюдента, визначене на рівні значимості  $\alpha$  при числі степенів свободи  $k = n-m-1$ .  
 В загальній постановці гіпотеза  $H_0$  про рівність параметра  $\alpha_j$  заданому числу  $\alpha_{j_0}$ , тобто  
 $H_0 : \alpha_j = \alpha_{j_0}$ , відкидається, якщо

$$\left| t \right| = \frac{a_j - \alpha_{j_0}}{S_{aj}} > t_{1-\alpha;n-m-1}, \dots\dots\dots(5.6.25)$$

тому, довірчий інтервал для параметра  $\alpha_j$  буде  
 $a_j - t_{1-\alpha;n-m-1} S_{aj} \leq \alpha_j \leq a_j + t_{1-\alpha;n-m-1} S_{aj} \dots\dots(5.6.26)$

Знайдемо допустимі значення t за формулою

$$= \text{СТЮДРАСПОБР}(1-\alpha;n-m-1)\text{ENTER}. \quad (5.6.27)$$

В нашому випадку отримали

$$t_{0.05;29} = 2.045 \quad ; \quad t_{0.09;29} = 1.754.$$

Перевіримо значимість коефіцієнтів регресії на основі даних табл.5.4.1

$$t_0 = \frac{54.49}{39.21} = 1.39 < t_{0.95;29} = 2.04, \text{ тобто коефіцієнт } a_0$$

незначимий ;

$$t_1 = \frac{5.747}{4,039} = 1.42 < t_{0.95;29} = 2.04, \text{ тобто коефіцієнт } a_1$$

незначимий ;

$$t_5 = \frac{|-6,978|}{4,747} = 1.47 < t_{0.95;29} = 2.04, \text{ тобто коефіцієнт}$$

$a_5$  незначимий ;

$$t_7 = \frac{2.585}{1,137} = 2.27 > t_{0.95;29} = 2.04, \text{ тобто}$$

коефіцієнт  $a_7$  значимий на 5% рівні.

Всі інші коефіцієнти  $a_2, a_3, a_4, a_6, a_8$  не значимі

Зведемо результати розрахунків в табл. 5.6.2

Таблиця 5.6.2. Встановлення значимості  
коефіцієнтів математичної моделі

	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$
$a_i$	54,49	5,747	5,200	- 0,07 38	- 0,967 0	-6,978	0,037	2,585	2,438
$m_{ai}$	39,21	4,039	7,343	1,24 1	2,402	4,747	1,879	1,137	4,991
t	1,39	1,42	0,708	- 0,05 9	-0,402	-1,47	0,020	2,27	0,488
p/тдо п.	0,8/1, 31	0,8/1, 31	0,5/0, 68	-	0,3/0, 39	0,8/1, 31	-	0,95/2, 04	0,3/0, 39

**Теорема 2. Якщо за істинну модель прийняти зрівноважену модель, то всі коефіцієнти моделі будуть значимі при коефіцієнті множинної детермінації  $R^2=1$ .**

Для доказу теореми 2 проведемо повторне зрівноваження моделі, взявши замість вектора екзаменаційних оцінок  $Y$  їх зрівноважені значення  $\tilde{Y}$ .

Результати строгого зрівноваження за способом найменших квадратів представимо у вигляді таблиці 5.6.3

Таблиця 5.6.3. Результати повторного зрівноваження

$a_0$ 2,4382 0957	$a_1$ 2,58537 1732	$a_2$ 0,0371 16449	$a_3$ - 6,9783794 11	$a_4$ - 0,9670143	= $a_i$	
2,26247E- 15	5,15436E- 16	8,51902E- 16	2,15194E- 15	1,08916E- 15	стандарт S	$a_i = S \sqrt{d_{ii}}$
1	2,89845E- 15	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	$R^2$	$m_1 = \mu$
9,50695E+ 30	29	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	Фкритерій	$n - m - 1$
638,94595 64	2,4363E- 28	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	$[(Y' - Y_{cp})^2]$	$[VV]$

Продовження табл.5.6.3.

$a_3$ - 0,07381125	$a_2$ 5,2005 9521	$a_1$ 5,74755 68338377	$a_0$ 54,4922	= $a_i$	
5,62637E- 16	3,32884E- 15	1,83106E- 15	1,77753E- 14	стандарт S	$a_i = S \sqrt{d_{ii}}$
#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	$R^2$	$m_1 = \mu$
#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	Фкритерій	$n - m - 1$
#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	$[(Y' - Y_{cp})^2]$	$[VV]$

Порівнюючи табл.5.6.3 з табл.5.4.1, помітимо автентичність коефіцієнтів  $a_i$ ;  $aR^2 = 1$ ;  $m_a \ll a_i$ .

**Теорема 2 доказана.**

### **5.6.3. Розробка критеріїв оцінювання знань студентів**

Екзаменаційна оцінка  $Y$  відповідає традиційній формі навчання, в якій викладач на основі відповіді студента безапеляційно виставляє оцінку.

Абсолютно інший підхід до оцінювання знань студентів необхідний в проблемній формі навчання .

Якщо при виставленні оцінки в традиційній формі навчання остаточне рішення приймає викладач, то в проблемній формі навчання після здачі іспиту і виставленні попередніх оцінок додатково проводиться анкетування студентів з метою забезпечення оберненого зв'язку «студент- викладач» .

В даній анкеті нулями позначено, що студент по тим чи іншим причинам не зміг підготувати монографію. Але, приймаючи до уваги, що він відпрацював лабораторні роботи і за результатами усної відповіді отримав позитивну оцінку.

В подальшому анкетні дані набираються в табл.1 комп'ютерної програми і зразу ж за результатами строгого зрівноваження виставляється комп'ютером оцінка з врахуванням думки не тільки викладача, але індивідуальної думки студента і всієї академічної групи.

Крім того, роздруковується середня квадратична похибка встановлення оцінки (середня квадратична похибка одиниці ваги  $\mu$ ) і індивідуальна середня квадратична похибка виставлення оцінки по кожному студенту.

Коли ж остаточну оцінку викладач проставляє в іспитову відомість і залікову книжку студента на основі комп'ютерної обробки матеріалів, то похибка в оцінці дорівнює нулю.

Це пояснюється тим, що коли ми в початкову систему рівнянь введемо вектор зрівноважених значень  $\tilde{Y}$  за матеріалами комп'ютерної обробки, то отримуємо середні квадратичні похибки, рівні нулю.

Звичайно, цим забезпечується об'єктивність оцінки, чого не можна сказати про традиційне оцінювання знань студентів.

Адже при традиційному оцінюванні знань студентів абсолютно відсутня інформація про точність, з якою проведено таке оцінювання, тобто відсутня інформація про середню квадратичну похибку іспитової оцінки.

На основі розробленої математичної моделі базового курсу приводиться не тільки середня квадратична похибка оцінювання знань студентів в цілому (по всій групі, курсу тощо), але і індивідуальна середня квадратична похибка в оцінюванні знань кожного конкретного студента.

Більше того, якщо в іспитову відомість проставляється не попередня оцінка викладача, а остаточна оцінка комп'ютера, то похибка іспитової оцінки буде зведена до нуля.

Такий підхід до оцінювання знань студентів нами розроблений вперше, він ще не описаний в педагогічній літературі.

Безумовно, даний підхід можливий лише при наявності побудованої математичної моделі по даному курсу.

Такий підхід можна впровадити і по всім академічним курсам, навіть і при традиційній формі навчання. Але це потребує від викладача розробки математичної моделі.

Знайдемо значення оберненої ваги зрівноваженої функції  $1/P_{\tilde{Y}}$ . Для цього попередньо перемножимо матриці

$$Q' = XN^{-1} \dots \dots \dots (5.6.28)$$

Де матриця  $X$

1	1	5	5	4	4	4	5	5	5
2	1	5	5	5	5	5	5	5	5
3	1	5	5	5	5	5	5	5	5
4	1	5	5	3	5	5	5	5	5
5	1	4	4	3	4	4	5	4	5
6	1	5	5	3	4	5	5	5	5
7	1	5	5	5	5	5	5	5	5
8	1	5	5	2	5	5	5	5	5
9	1	5	5	5	5	5	5	5	5
10	1	4	5	4	5	4	5	0	5
11	1	5	5	5	5	5	5	5	5
12	1	4	5	4	5	4	0	0	4
13	1	4	5	4	4	4	5	4	5
14	1	5	5	3	5	5	5	5	5
15	1	5	5	4	3	5	5	5	5
16	1	5	5	4	4	5	5	5	5
17	1	4	5	4	4	4	5	5	5
18	1	5	5	5	5	5	4	5	5
19	1	5	5	3	5	5	4	0	5
20	1	5	5	3	5	5	5	5	5
21	1	5	5	5	5	5	5	5	5
22	1	5	5	4	4	5	5	5	5
23	1	4	5	4	4	4	5	4	4
24	1	5	5	3	5	5	5	5	5
25	1	5	5	3	5	5	5	5	5
26	1	5	5	4	4	5	5	5	5
27	1	5	5	3	5	5	5	5	5
28	1	5	5	5	5	5	5	5	5
29	1	5	5	3	5	5	5	5	5
30	1	4	5	5	5	5	5	5	5
31	1	5	5	3	5	5	5	5	5
32	1	4	5	4	5	5	5	5	5
33	1	5	5	5	5	5	5	5	5
34	1	5	5	3	5	5	5	5	5
35	1	5	5	3	5	5	5	5	5
36	1	5	5	5	5	5	5	5	5
37	1	5	5	3	4	5	5	5	4
38	1	5	5	5	5	5	5	5	5



Матриця  $N^{-1}$

37,6099 3079	0,17429 873	5,86444 4295	-	0,09791 0912	0,09744 857	0,30739 4507	0,10958 0929	0,03323 5048	2,48865 9681
0,17429 873	0,39908 9485	0,12123 6141	-	0,01952 37	0,03203 8288	0,28479 0668	0,01478 5251	0,01321 7014	0,07086 6377
5,86444 4295	0,12123 6141	1,31902 3213	-	0,04678 6832	0,03985 332	0,14280 7802	0,00908 1906	0,01863 6552	0,18303 2862
0,09791 0912	0,01952 37	0,04678 6832	-	0,03768 1079	0,00492 5145	0,00378 7794	0,00793 2749	0,00677 6924	0,02198 1654
0,09744 857	0,03203 8288	0,03985 332	-	0,00492 5145	0,14120 4237	0,10692 7314	0,02105 2276	0,01318 8052	0,06930 6857
0,30739 4507	0,28479 0668	0,14280 7802	-	0,00378 7794	0,10692 7314	0,55122 3037	0,00356 2341	0,03814 99	0,04302 7119
0,10958 0929	0,01478 5251	0,00908 1906	-	0,00793 2749	0,02105 2276	0,00356 2341	0,08638 6633	0,02697 821	0,11003 4524
0,03323 5048	0,01321 7014	0,01863 6552	-	0,00677 6924	0,01318 8052	0,03814 99	0,02697 821	0,03162 3978	0,01473 202
2,48865 9681	0,07086 6377	0,18303 2862	-	0,02198 1654	0,06930 6857	0,04302 7119	0,11003 4524	0,01473 202	0,60930 3828

Матриця Q' буде

Таблиця 5.6.4. Множення матриць для оцінки точності

			$Q' =$						
			$X * N$						
			$^{-1}$						
-		0,16	0,00	0,00	-	-	0,03	0,10	
0,55	0,28	963	364	044	0,46	0,01	026	491	
9	416	68	1	8	196	334	7	7	
-	0,05	-	0,04		-	0,01	-	-	
0,05	093	0,05	018	0,02	0,01	208	0,00	0,02	
624	13	981	5	98	388	1	147	94	

6		1							
-		-							
0,05 624 6	0,05 093 13	0,05 981 1	0,04 018 5	0,02 98	- 0,01 388	0,01 208 1	- 0,00 147	- 0,02 94	
-									
0,25 206 7	0,01 188 39	0,03 376 25	0,03 517 7	0,03 965	- 0,02 145	- 0,00 378	0,01 208 2	0,01 456 5	
	- 1,53 E-14	-1	3,05 E- 16	1,05 E- 14	2,37 E- 14	3,4 E- 15	1,3 E- 15	1,24 E- 14	
5									
-									
0,34 951 6	0,02 015 4	0,07 361 58	0,03 025 2	0,10 155 4	0,08 547 5	- 0,02 484	- 0,00 111	0,08 387 1	
-									
0,05 624 6	0,05 093 13	0,05 981 1	0,04 018 5	0,02 98	- 0,01 388	0,01 208 1	- 0,00 147	- 0,02 94	
-									
0,34 997 8	- 0,00 764	0,08 054 93	0,07 285 8	0,04 457 5	- 0,02 524	- 0,01 172	0,01 885 9	0,03 654 6	
-									
0,05 624 6	0,05 093 13	0,05 981 1	0,04 018 5	0,02 98	- 0,01 388	0,01 208 1	- 0,00 147	- 0,02 94	
-									
0,80 202 5	0,01 680 6	0,15 783 69	0,01 307 7	0,04 367 4	- 0,09 335	0,12 781 6	- 0,10 145	0,03 281 6	

-	0,05	0,05	0,05	0,04	-	0,01	-	-
624	093	981	018	0,02	0,01	208	0,00	0,02
6	13	1	5	98	388	1	147	94
-	-	-	-	-	-	-	-	-
1,13	0,01	0,02	0,00	0,00	-	-	0,01	-
873	986	021	460	771	0,03	0,19	871	0,02
	6	35	5	9	251	408	1	631
-	-	-	-	-	-	-	-	-
0,76	0,10	0,27	0,00	0,04	-	-	-	0,16
653	171	223	910	477	0,13	0,00	0,01	105
3	2	64	6	8	902	115	186	1
-	-	-	-	-	-	-	-	-
0,25	0,01	0,03	0,03	-	-	-	0,01	0,01
206	188	376	517	0,03	0,02	0,00	208	456
7	39	25	7	965	145	378	2	5
-	-	-	-	-	-	-	-	-
0,34	0,03	0,06	0,01	0,24	-	-	-	0,13
905	266	668	235	768	0,19	0,03	0,02	119
4	9	23	4	4	619	796	107	7
-	-	-	-	-	-	-	-	-
0,25	0,00	0,02	0,00	0,10	0,08	-	-	-
160	063	682	742	647	926	0,01	0,00	0,06
5	1	9	9	9	2	69	788	189
-	-	-	-	-	-	-	-	-
0,73	0,11	0,29	0,01	-	-	-	0,04	0,17
329	492	087	588	0,03	0,17	0,02	348	578
8	9	29	3	159	717	813	4	3
-	-	-	-	-	-	-	-	-
0,16	0,03	0,05	0,03	0,00	-	-	0,02	0,08
582	614	072	225	874	0,01	0,07	550	063
7	61	9	2	7	031	431	6	6
-	0,06	-	-	-	0,17	0,04	-	0,05

0,52 782 4	318 38	0,05 033 8	0,00 922 6	0,04 734 3	285 9	471 9	0,11 906	093 9
-								
0,25 206 7	0,01 188 39	0,03 376 25	0,03 517 7	0,03 965	- 0,02 145	- 0,00 378	0,01 208 2	0,01 456 5
-								
0,05 624 6	0,05 093 13	0,05 981 1	0,04 018 5	0,02 98	- 0,01 388	0,01 208 1	- 0,00 147	- 0,02 94
-								
0,25 160 5	0,00 063 1	0,02 682 9	0,00 742 9	0,10 647 9	0,08 926 2	- 0,01 69	- 0,00 788	0,06 189
-								
1,72 212 63	0,03 084 6	0,08 920 35	0,01 287 6	0,02 452 8	- 0,09 599	0,10 888 5	- 0,00 287	- 0,44 825
-								
0,25 206 7	0,01 188 39	0,03 376 25	0,03 517 7	0,03 965	- 0,02 145	- 0,00 378	0,01 208 2	0,01 456 5
-								
0,25 206 7	0,01 188 39	0,03 376 25	0,03 517 7	0,03 965	- 0,02 145	- 0,00 378	0,01 208 2	0,01 456 5
-								
0,25 160 5	0,00 063 1	0,02 682 9	0,00 742 9	0,10 647 9	0,08 926 2	- 0,01 69	- 0,00 788	0,06 189
-								
0,25	0,01 188	0,03 376	- 0,03	0,03 965	- 0,02	- 0,00	0,01 208	0,01 456

206 7	39	25	517 7		145	378	2	5
-		-						
0,05 624 6	0,05 093 13	0,05 981 1	0,04 018 5	0,02 98	- 0,01 388	0,01 208 1	- 0,00 147	- 0,02 94
-								
0,25 206 7	0,01 188 39	0,03 376 25	0,03 517 7	0,03 965	- 0,02 145	- 0,00 378	0,01 208 2	0,01 456 5
-								
0,23 054 4	0,34 815 8	0,06 142 5	0,02 066 1	0,00 223 9	0,27 091 4	- 0,00 27	0,01 174 5	0,04 146 8
-								
0,25 206 7	0,01 188 39	0,03 376 25	0,03 517 7	0,03 965	- 0,02 145	- 0,00 378	0,01 208 2	0,01 456 5
-								
0,32 845 5	0,36 768 2	0,10 821 18	- 0,01 702	0,00 268 7	0,26 712 6	- 0,01 064	0,01 852 2	0,06 344 9
-								
0,05 624 6	0,05 093 13	0,05 981 1	0,04 018 5	0,02 98	- 0,01 388	0,01 208 1	- 0,00 147	- 0,02 94
-								
0,25 206 7	0,01 188 39	0,03 376 25	0,03 517 7	0,03 965	- 0,02 145	- 0,00 378	0,01 208 2	0,01 456 5
-								
0,25 206	0,01 188 39	0,03 376 25	- 0,03 517	0,03 965	- 0,02 145	- 0,00 378	0,01 208 2	0,01 456 5

7			7						
-		-							
0,05	0,05	0,05	0,04		-	0,01	-	-	
624	093	981	018	0,02	0,01	208	0,00	0,02	
6	13	1	5	98	388	1	147	94	
		-	-	-					
2,13	0,05	0,10	0,00	0,03	0,12	0,08	-	-	
914	071	941	827	224	850	519	0,01	0,52	
37	2	7	1	7	2	7	584	543	
-		-							
0,05	0,05	0,05	0,04		-	0,01	-	-	
624	093	981	018	0,02	0,01	208	0,00	0,02	
6	13	1	5	98	388	1	147	94	

Комп'ютерна формула отримання допоміжної матриці

=МУМНОЖ(В2:J39;А66:І74) F2, Ctrl + Shift + Enter

(5.6.29)

Величина оберненої ваги зрівноваженої функції знаходиться построчним множенням цієї допоміжної матриці на відповідний стовпчик транспонованої матриці  $X^T$  за формулами

- = *МҮМНӨЖ*(S2 : AA2; A43 : A51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.30)
- = *МҮМНӨЖ*(S3 : AA3; B43 : B51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.31)
- = *МҮМНӨЖ*(S4 : AA4; C43 : C51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.32)
- = *МҮМНӨЖ*(S5 : AA5; D43 : D51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.33)
- = *МҮМНӨЖ*(S6 : AA6; E43 : E51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.34)
- = *МҮМНӨЖ*(S7 : AA7; F43 : F51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.35)
- = *МҮМНӨЖ*(S8 : AA8; G43 : G51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.36)
- = *МҮМНӨЖ*(S9 : AA9; H43 : H51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.37)
- = *МҮМНӨЖ*(S10 : AA10; I43 : I51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.38)
- = *МҮМНӨЖ*(S11 : AA11; J43 : J51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.39)
- = *МҮМНӨЖ*(S12 : AA12; K43 : K51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.40)
- = *МҮМНӨЖ*(S13 : AA13; L43 : L51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.41)
- = *МҮМНӨЖ*(S14 : AA14; M43 : M51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.42)
- = *МҮМНӨЖ*(S15 : AA15; N43 : N51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.43)
- = *МҮМНӨЖ*(S16 : AA16; O43 : O51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.44)
- = *МҮМНӨЖ*(S17 : AA17; P43 : P51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.45)
- = *МҮМНӨЖ*(S18 : AA18; Q43 : Q51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.46)
- = *МҮМНӨЖ*(S19 : AA19; R43 : R51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.47)
- = *МҮМНӨЖ*(S20 : AA20; S43 : S51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.48)
- = *МҮМНӨЖ*(S21 : AA21; T43 : T51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.49)
- = *МҮМНӨЖ*(S22 : AA22; U43 : U51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.50)
- = *МҮМНӨЖ*(S23 : AA23; V43 : V51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.51)
- = *МҮМНӨЖ*(S24 : AA24; W43 : W51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.52)
- = *МҮМНӨЖ*(S25 : AA25; X43 : X51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.53)
- = *МҮМНӨЖ*(S26 : AA26; Y43 : Y51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.54)
- = *МҮМНӨЖ*(S27 : AA27; Z43 : Z51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.55)
- = *МҮМНӨЖ*(S28 : AA28; AA43 : AA51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.56)
- = *МҮМНӨЖ*(S29 : AA29; AB43 : AB51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.57)
- = *МҮМНӨЖ*(S30 : AA30; AC43 : AC51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.58)
- = *МҮМНӨЖ*(S31 : AA31; AD43 : AD51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.59)

- = МУМНОЖ(S32 : AA32; AE43 : AE51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.60)
- = МУМНОЖ(S33 : AA33; AF43 : AF51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.61)
- = МУМНОЖ(S34 : AA34; AG43 : AG51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.62)
- = МУМНОЖ(S35 : AA35; AH43 : AH51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.63)
- = МУМНОЖ(S36 : AA36; AI43 : AI51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.64)
- = МУМНОЖ(S37 : AA37; AJ43 : AJ51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.65)
- = МУМНОЖ(S38 : AA38; AK43 : AK51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.66)
- = МУМНОЖ(S39 : AA39; AL43 : AL51) F2, Ctrl + Shift + Enter (5.6.67)

В результаті отримали вектор-стовпець обернених ваг  $1/P_{\bar{y}}$

1/Py'
0,487704
0,085940
0,085940
0,075925
1
0,13783
0,08594
0,183961
0,08594
0,62038
0,08594
0,945212
0,263131
0,075925
0,469169
0,115006
0,318474
0,148166
0,569883
0,075925
0,08594



0,115006
0,550332
0,075925
0,075925
0,115006
0,075925
0,08594
0,075925
0,383167
0,075925
0,379526
0,08594
0,075925
0,075925
0,08594
0,579391
0,08594

Для визначення середньої квадратичної похибки функції необхідно знайти квадратний корінь із даного вектора, а після перемножити середню квадратичну похибку одиниці ваги  $\mu$  на корінь квадратний із вектора обернених ваг.

Ітак, вектор квадратного кореня із обернених ваг зрівноваженої оцінки  $\tilde{Y}$  буде

$\sqrt{(1/Py')}$
0,698358
0,293155
0,293155
0,275546

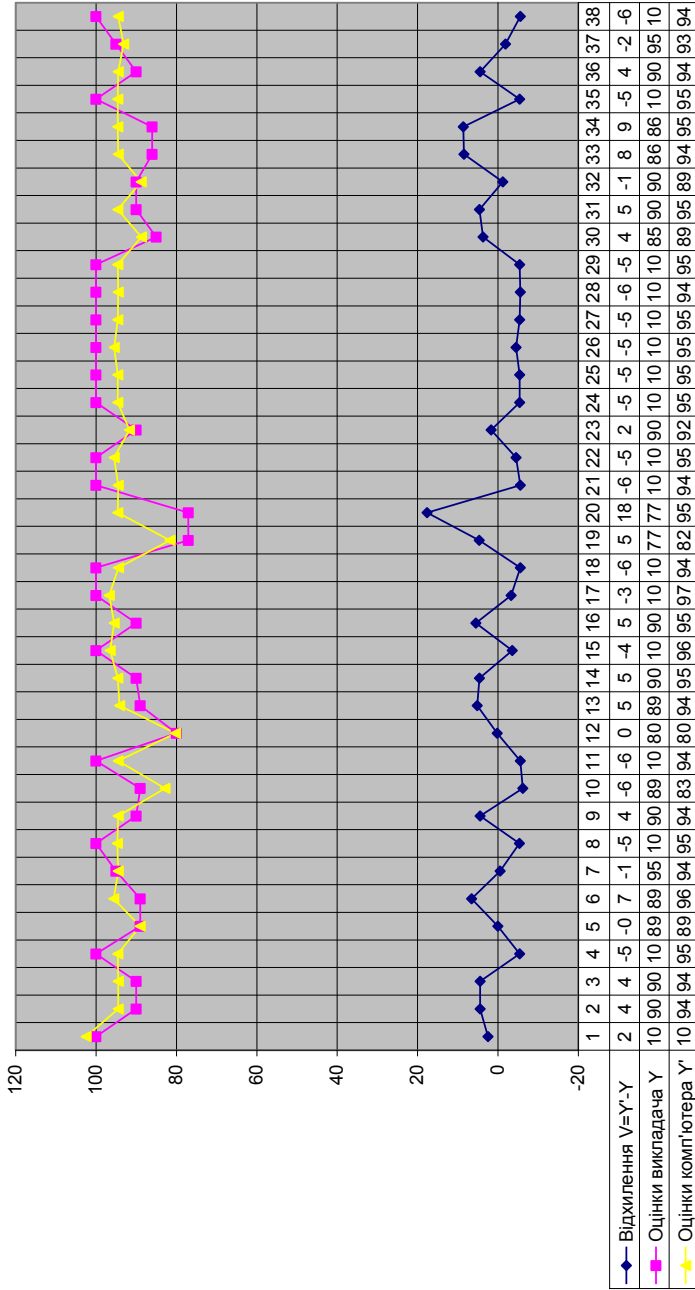
1
0,371254
0,293155
0,428907
0,293155
0,787642
0,293155
0,97222
0,512963
0,275546
0,684959
0,339126
0,564335
0,384923
0,754906
0,275546
0,293155
0,339126
0,741844
0,275546
0,275546
0,339126
0,275546
0,293155
0,275546
0,619005
0,275546
0,616057
0,293155
0,275546
0,275546
0,293155
0,761177
0,293155

А середні квадратичні похибки (стандарти)  
зрівноважених оцінок студентів будуть

№студ.	$m_{y'}$
1	4,46529
2	1,87443
3	1,87443
4	1,761834
5	6,393981
6	2,373793
7	1,87443
8	2,742424
9	1,87443
10	5,036169
11	1,87443
12	6,216358
13	3,279873
14	1,761834
15	4,379617
16	2,168364
17	3,608346
18	2,461189
19	4,826852

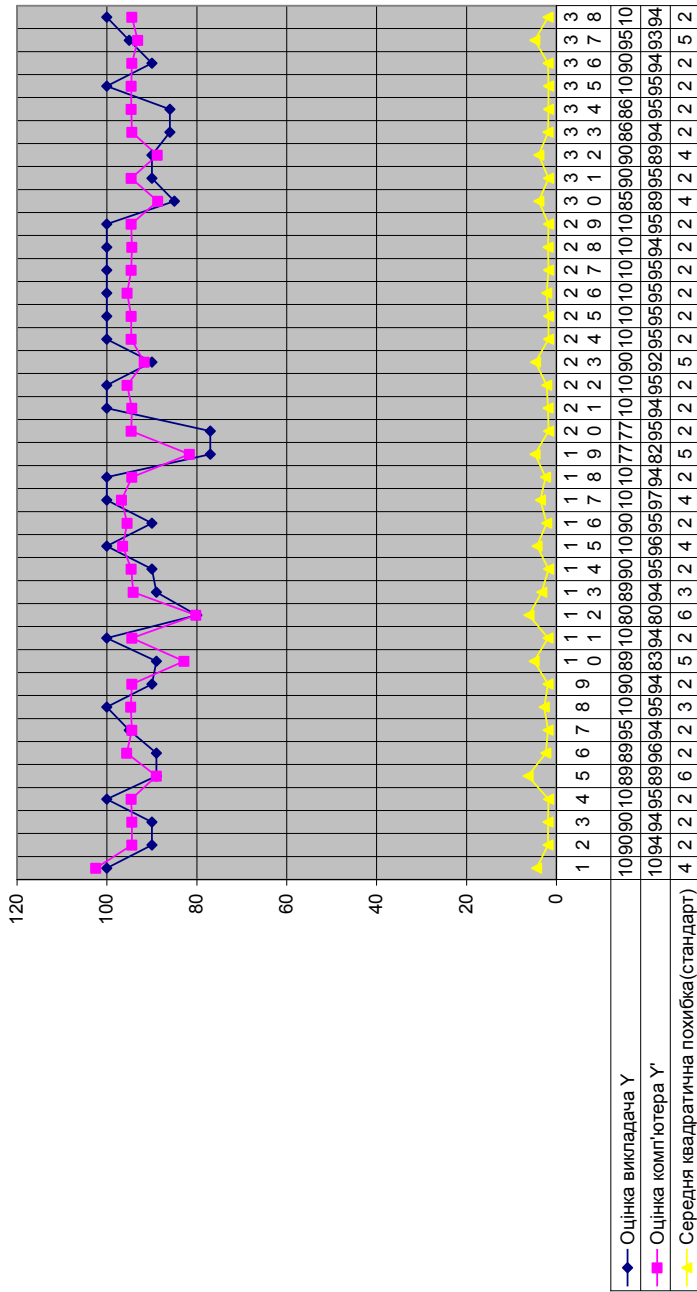
20	1,761834
21	1,87443
22	2,168364
23	4,743334
24	1,761834
25	1,761834
26	2,168364
27	1,761834
28	1,87443
29	1,761834
30	3,957904
31	1,761834
32	3,939055
33	1,87443
34	1,761834
35	1,761834
36	1,87443
37	4,866953
38	1,87443
$\Sigma=$	4,46529
$my'/n=$	1,87443

## Екзаменаційні оцінки



Бали по шкалі EST

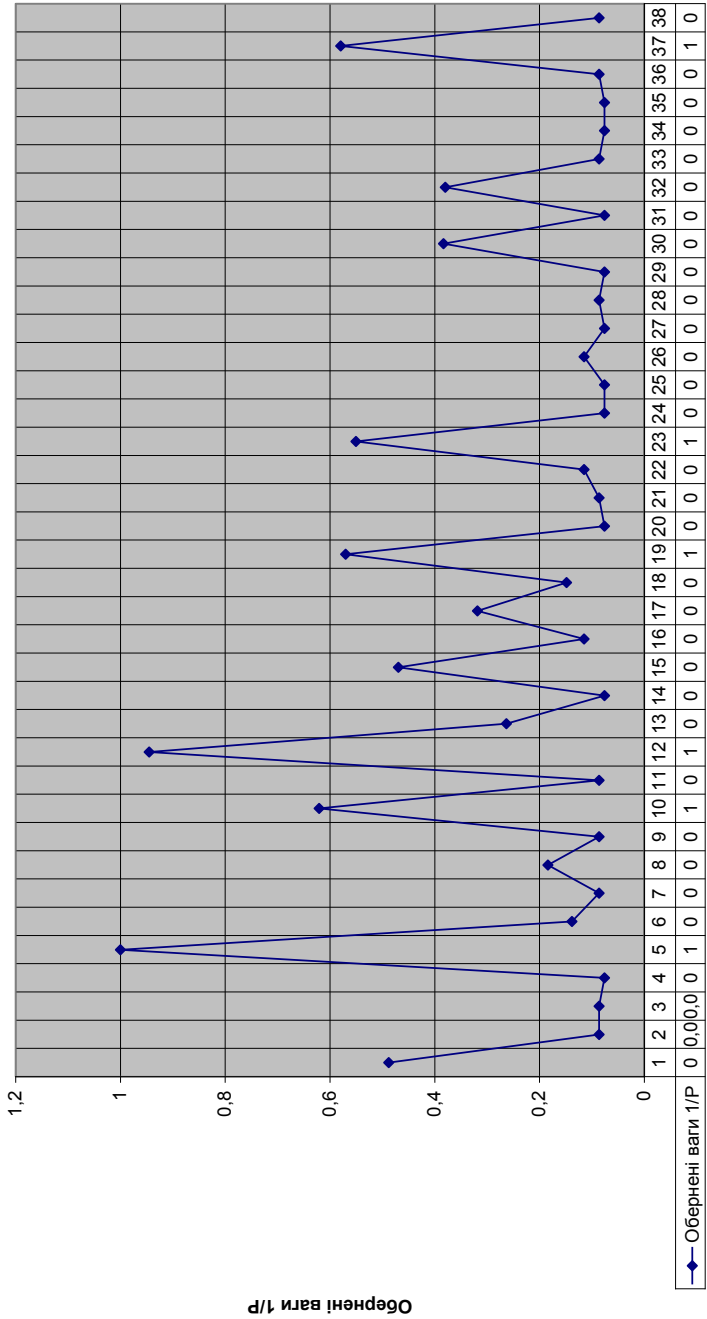
Екзаменаційні оцінки



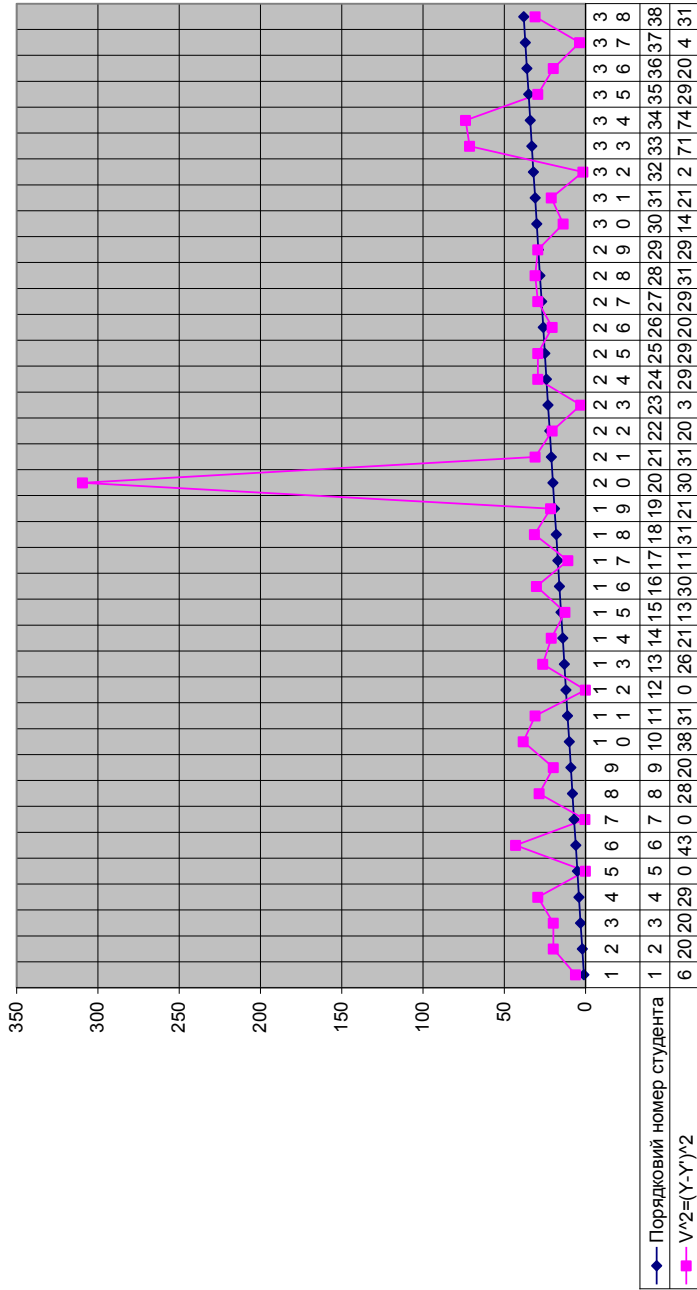
Нестудента по списку

Бали по шкалі EST

Обернені ваги 1/P



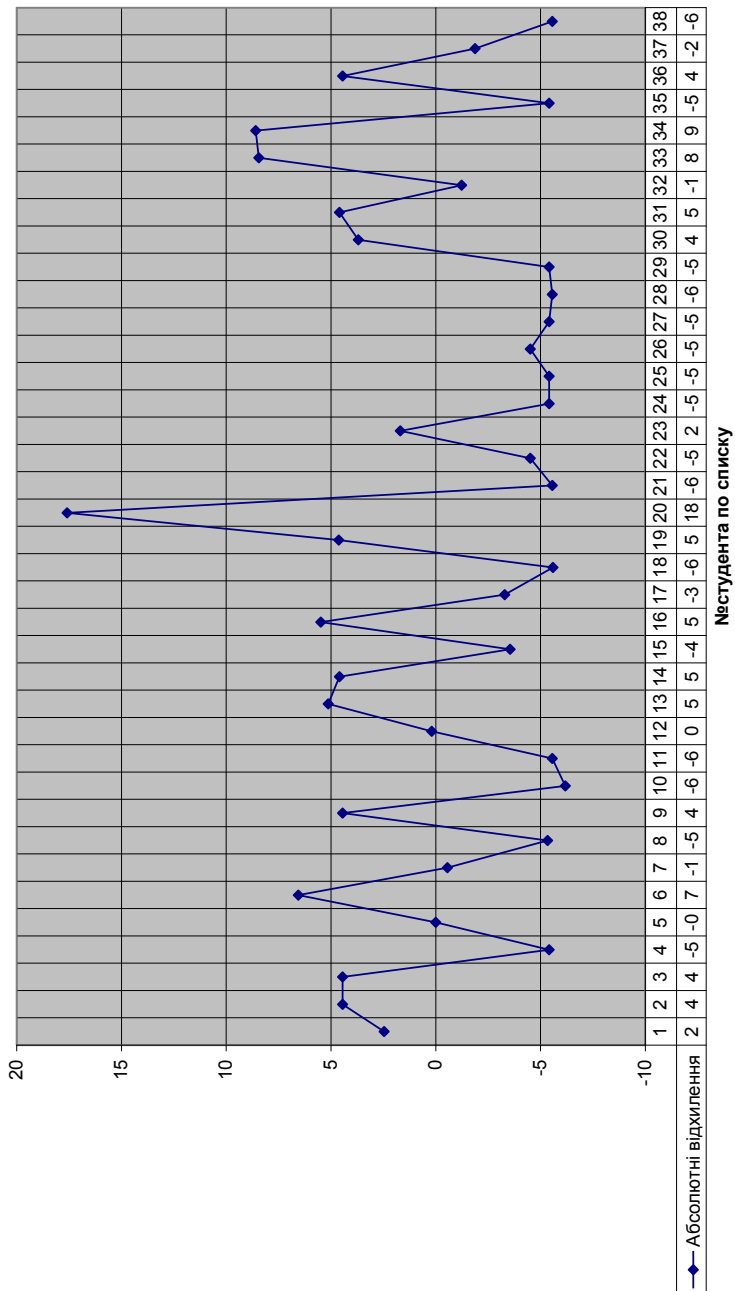
### Квадратичні відхилення



Квадратичні відхилення  $V^2$

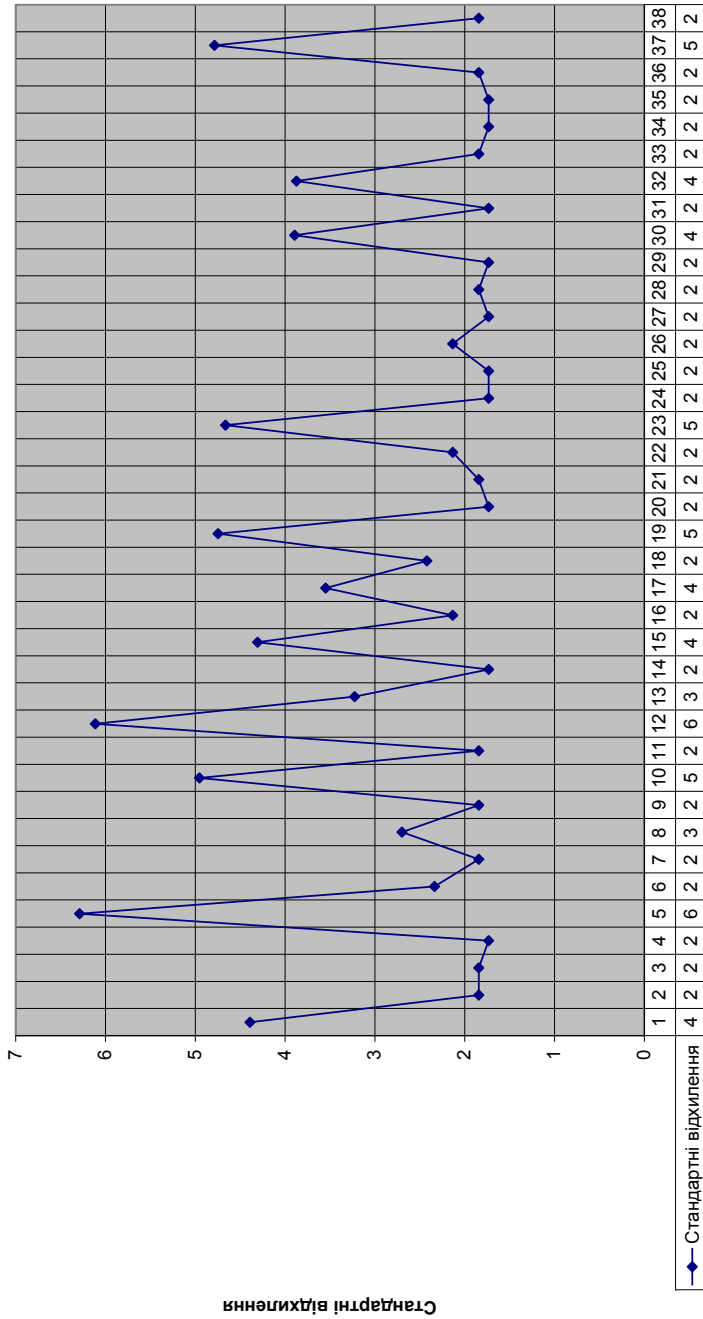


Абсолютні відхилення



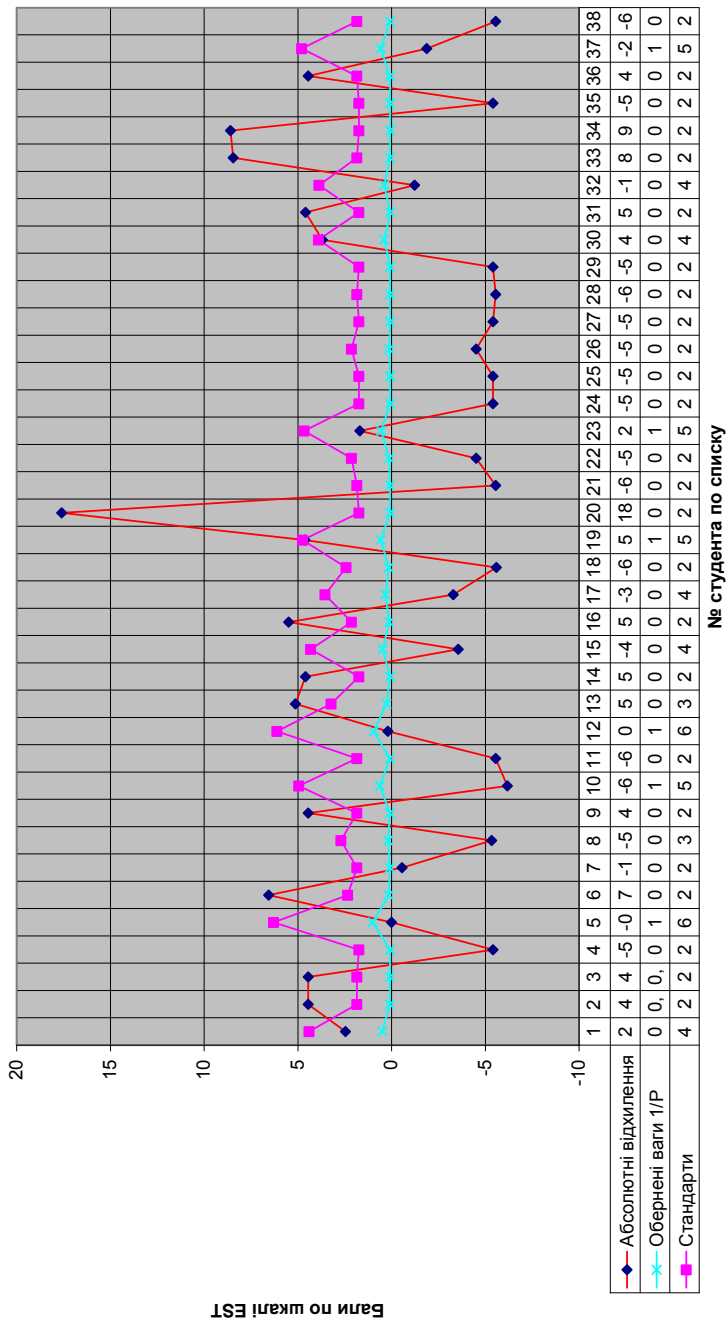
$\lambda \cdot \lambda = \lambda$

Стандартні відхилення



Стандартні відхилення

### Порівняльний аналіз похибок



Бали по шкалі EST

При побудові довірчого інтервалу для параметра  $\sigma^2$  виходять із того, що статистика  $\frac{nS^2}{\sigma^2}$  має  $\chi^2$ - розподіл з  $k=n-2$  степенями свободи.

Тому, інтервальна оцінка для  $\sigma^2$  на рівні значимості  $\alpha$  має вигляд

$$\frac{nS^2}{\chi_{\alpha/2;n-2}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{nS^2}{\chi_{1-\alpha/2;n-2}^2} \dots\dots\dots(5.6.68)$$

Довірчий інтервал вибирається таким чином, щоб

$$P(\chi^2 < \chi_{1-\alpha/2;n-2}) = P(\chi^2 > \chi_{\alpha/2;n-2}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Знайдемо параметр  $\chi^2$  за формулою

$$\begin{aligned} &= \text{ХИ2ОБР}(0.025;29) \dots\dots\dots(5.6.70) \\ &= \text{ХИ2ОБР}(0.975;29) \end{aligned}$$

$$\chi_{\alpha/2;n-p-1}^2 = \chi_{0.025;29}^2 = 45.722;$$

$$\chi_{1-\alpha/2;n-p-1}^2 = \chi_{0.975;29}^2 = 16.047.$$

Для 95% відсоткового довірчого інтервалу для середньої квадратичної похибки одиниці ваги  $\mu^2$  за формулою (5.6.68) отримаємо

Розглянемо конкретні інтервальні оцінки точності встановлення

$$\frac{n\mu^2}{\chi_{\alpha/2;n-2}^2} \leq \mu^2 \leq \frac{n\mu^2}{\chi_{1-\alpha/2;n-2}^2},$$

$$\frac{29 * 6,394^2}{45,722} \leq \mu^2 \leq \frac{29 * 6,394^2}{16,047},$$

$$\frac{1185,61}{45,722} \leq \mu^2 \leq \frac{1185,61}{16,047},$$

$$25,93 \leq \mu^2 \leq 73,88,$$

$$\sqrt{25,93} \leq \mu \leq \sqrt{73,88},$$

$$5,09 \leq \mu \leq 8,60.$$

екзаменаційних оцінок по шкалі EST

$$\frac{29 * 4,46^2}{45,722} \leq \sigma_1^2 \leq \frac{29 * 4,46^2}{16,047}; 0,634 * 4,46^2 \leq \sigma_1^2 \leq 1,807 * 4,46^2;$$
$$12,61 \leq \sigma_1^2 \leq 35,94; \sqrt{12,61} \leq \sigma_1 \leq \sqrt{35,94}; \quad 3,55 \leq \sigma_1 \leq 5,99$$
$$\sqrt{0,634 * 1,87} \leq \sigma_2 \leq \sqrt{1,807 * 1,87}; \quad 1,49 \leq \sigma_2 \leq 2,51,$$
$$0,796 * 1,87 \leq \sigma_3 \leq 1,344 * 1,87; \quad 1,49 \leq \sigma_3 \leq 2,51,$$
$$0,796 * 1,76 \leq \sigma_4 \leq 1,344 * 1,76; \quad 1,40 \leq \sigma_4 \leq 2,36,$$
$$0,796 * 6,39 \leq \sigma_5 \leq 1,344 * 6,39; \quad 5,09 \leq \sigma_5 \leq 8,59,$$
$$0,796 * 2,37 \leq \sigma_6 \leq 1,344 * 2,37; \quad 1,89 \leq \sigma_6 \leq 3,18,$$
$$0,796 * 1,87 \leq \sigma_7 \leq 1,344 * 1,87; \quad 1,49 \leq \sigma_7 \leq 2,51,$$
$$0,796 * 2,74 \leq \sigma_8 \leq 1,344 * 2,74; \quad 2,18 \leq \sigma_8 \leq 3,68,$$
$$0,796 * 1,87 \leq \sigma_9 \leq 1,344 * 1,87; \quad 1,49 \leq \sigma_9 \leq 2,51,$$
$$0,796 * 5,04 \leq \sigma_{10} \leq 1,344 * 5,04; \quad 4,01 \leq \sigma_{10} \leq 6,77,$$
$$0,796 * 1,87 \leq \sigma_{11} \leq 1,344 * 1,87; \quad 1,49 \leq \sigma_{11} \leq 2,51,$$
$$0,796 * 6,22 \leq \sigma_{12} \leq 1,344 * 6,22; \quad 4,95 \leq \sigma_{12} \leq 8,36,$$
$$0,796 * 3,28 \leq \sigma_{13} \leq 1,344 * 3,28; \quad 2,61 \leq \sigma_{13} \leq 4,41,$$
$$0,796 * 1,76 \leq \sigma_{14} \leq 1,344 * 1,76; \quad 1,40 \leq \sigma_{14} \leq 2,36,$$
$$0,796 * 4,38 \leq \sigma_{15} \leq 1,344 * 4,38; \quad 3,49 \leq \sigma_{15} \leq 5,89,$$
$$0,796 * 2,17 \leq \sigma_{16} \leq 1,344 * 2,17; \quad 1,73 \leq \sigma_{16} \leq 2,92,$$
$$0,796 * 3,61 \leq \sigma_{17} \leq 1,344 * 3,61; \quad 2,87 \leq \sigma_{17} \leq 4,85,$$
$$0,796 * 2,46 \leq \sigma_{18} \leq 1,344 * 2,46; \quad 1,96 \leq \sigma_{18} \leq 3,31,$$
$$0,796 * 4,83 \leq \sigma_{19} \leq 1,344 * 4,83; \quad 3,84 \leq \sigma_{19} \leq 6,49,$$

$0,796 * 1,76 \leq \sigma_{20} \leq 1,344 * 1,76;$	$1,40 \leq \sigma_{20} \leq 2,36,$
$0,796 * 1,87 \leq \sigma_{21} \leq 1,344 * 1,87;$	$1,49 \leq \sigma_{21} \leq 2,51 ,$
$0,796 * 2,17 \leq \sigma_{22} \leq 1,344 * 2,17;$	$1,73 \leq \sigma_{22} \leq 2,92,$
$0,796 * 4,74 \leq \sigma_{23} \leq 1,344 * 4,74;$	$3,77 \leq \sigma_{23} \leq 6,37,$
$0,796 * 1,76 \leq \sigma_{24} \leq 1,344 * 1,76;$	$1,40 \leq \sigma_{24} \leq 2,36,$
$0,796 * 1,76 \leq \sigma_{25} \leq 1,344 * 1,76;$	$1,40 \leq \sigma_{25} \leq 2,36,$
$0,796 * 2,17 \leq \sigma_{26} \leq 1,344 * 2,17;$	$1,73 \leq \sigma_{26} \leq 2,92,$
$0,796 * 1,76 \leq \sigma_{27} \leq 1,344 * 1,76;$	$1,40 \leq \sigma_{27} \leq 2,36,$
$0,796 * 1,87 \leq \sigma_{28} \leq 1,344 * 1,87;$	$1,49 \leq \sigma_{28} \leq 2,51,$
$0,796 * 1,76 \leq \sigma_{29} \leq 1,344 * 1,76;$	$1,40 \leq \sigma_{29} \leq 2,36,$
$0,796 * 3,96 \leq \sigma_{30} \leq 1,344 * 3,96;$	$3,15 \leq \sigma_{30} \leq 5,32,$
$0,796 * 1,76 \leq \sigma_{31} \leq 1,344 * 1,76;$	$1,40 \leq \sigma_{31} \leq 2,36,$
$0,796 * 3,94 \leq \sigma_{32} \leq 1,344 * 3,94;$	$3,14 \leq \sigma_{32} \leq 5,30,$
$0,796 * 1,87 \leq \sigma_{33} \leq 1,344 * 1,87;$	$1,49 \leq \sigma_{33} \leq 2,51,$
$0,796 * 1,76 \leq \sigma_{34} \leq 1,344 * 1,76;$	$1,40 \leq \sigma_{34} \leq 2,36,$
$0,796 * 1,76 \leq \sigma_{35} \leq 1,344 * 1,76;$	$1,40 \leq \sigma_{35} \leq 2,36,$
$0,796 * 1,87 \leq \sigma_{36} \leq 1,344 * 1,87;$	$1,49 \leq \sigma_{36} \leq 2,51,$
$0,796 * 4,87 \leq \sigma_{37} \leq 1,344 * 4,87;$	$3,88 \leq \sigma_{37} \leq 6,54,$
$0,796 * 1,87 \leq \sigma_{38} \leq 1,344 * 1,87;$	$1,49 \leq \sigma_{38} \leq 2,51.$

Як бачимо, верхня межа похибки у 8 балів стосується 5-го і 12-го студента; верхня межа в 6 балів стосується 10-го, 19-го, 23-го і 37 студентів.

#### **5.6.4. Аналіз коваріаційної та кореляційної матриць**

При визначенні взаємного впливу різних характеристик педагогічного процесу слід використовувати достатньо ефективні статистичні підходи . Статистичний зв'язок між

змінними будемо досліджувати методом кореляційного аналізу.

Представимо коваріаційну матрицю  $K$  зрівноважених невідомих  $a_i$  формулою

$$K = M^2 = \mu^2 N^{-1}. \quad (5.6.71)$$

	Коваріаційна матриця	$K=N^{-1}\mu^2$						
1537,606379	7,125863016	-239,7560104	4,002890715	3,983988787	12,56720618	4,479998897	1,368748088	-101,7438459
7,125863016	16,31597094	-4,956495801	0,798187217	1,309820976	-11,6430937	0,604465252	-0,54035105	-2,897229286
-239,7560104	-4,956495801	53,92561124	-1,912786509	-1,62832282	-5,839409773	-0,371295478	0,761917965	7,482930465
4,002890715	0,798187217	-1,912786509	1,540515117	-0,20135463	0,154856331	0,324314497	-0,27706091	-0,89867571
3,983988787	1,309820976	-1,62832282	-0,20135463	5,77285122	-4,371508184	0,860679952	0,539166984	-2,833471473
12,56720618	-11,6430937	-5,839409773	0,154856331	-4,371508184	22,53564527	-0,145639162	-1,55968195	-1,759077204
4,479998897	0,604465252	-0,371295478	0,324314497	0,860679952	-0,145639162	3,531743749	-1,102949845	-4,498540203
1,368748088	-0,54035105	0,761917965	-0,27706091	0,539166984	-1,55968195	-1,102949845	1,292882737	0,602289023
-101,7438459	-2,897229286	7,482930465	-0,89867571	-2,833471473	-1,759077204	-4,498540203	0,602289023	24,91016199

Коваріація  $K_{ij}$  разом з дисперсіями  $D_i = K_{ij}$  утворюють коваріаційну матрицю, яка складається з  $m$  рядків і  $m$  стовпців. В нашому випадку  $m=9$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{1m} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots & K_{2m} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \dots & K_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{m1} & K_{m2} & K_{m3} & \dots & K_{mm} \end{bmatrix} \quad (5.6.72)$$

Множення оберненої матриці  $N^{-1}$  на квадрат середньої квадратичної похибки одиниці ваги  $\mu^2$  проведено за комп'ютерною формулою

$$= \{(A66 : I74) * O55^2\} F2, Ctrl + Shift + Enter, \quad (5.6.73)$$

де діапазоном (A66:I74) позначено обернену матрицю нормальних рівнянь  $N^{-1}$ , чарунком O55 вказано місцеположення середньої квадратичної похибки одиниці ваги  $\mu$ .

Коваріаційна матриця симетрична відносно головної діагоналі  $K_{ij} = K_{ji}$ . На головній діагоналі стоїть дисперсія ознак.

В першу чергу, коваріаційна матриця зрівноважених елементів корисна тим, що дає дисперсії коефіцієнтів побудованої математичної моделі. А взявши квадратний корінь із даних дисперсій, отримаємо стандарти  $\sigma_i$  (або середні квадратичні похибки коефіцієнтів побудованої математичної моделі).



Так, ми отримали	
= <i>КОРЕНЬ</i> (A85) Enter	→ 39.21232433 = $\sigma_{a0}$ ,
= <i>КОРЕНЬ</i> (B86) Enter	→ 4.039303275 = $\sigma_{a1}$ ,
= <i>КОРЕНЬ</i> (C87) Enter	→ 7.343405970 = $\sigma_{a2}$ ,
= <i>КОРЕНЬ</i> (D88) Enter	→ 1.241174894 = $\sigma_{a3}$ ,
= <i>КОРЕНЬ</i> (E89) Enter	→ 2.402675846 = $\sigma_{a4}$ ,
= <i>КОРЕНЬ</i> (F90) Enter	→ 4.747172344 = $\sigma_{a5}$ ,
= <i>КОРЕНЬ</i> (G91) Enter	→ 1.879293417 = $\sigma_{a6}$ ,
= <i>КОРЕНЬ</i> (H92) Enter	→ 1.137050015 = $\sigma_{a7}$ ,
= <i>КОРЕНЬ</i> (I93) Enter	→ 4.991008073 = $\sigma_{a8}$ .

Стандартні відхилення зрівноважених значень коефіцієнтів повністю автентичні з приведеними в табл.5.4.1 (друга строчка). Приведемо інтервальну оцінку точності

$$0,796 * 39,21 \leq \sigma_{a0} \leq 1,344 * 39,21; \quad 31,21 \leq \sigma_{a0} \leq 52,70,$$

$$0,796 * 4,04 \leq \sigma_{a1} \leq 1,344 * 4,04; \quad 3,22 \leq \sigma_{a1} \leq 5,43,$$

$$0,796 * 7,34 \leq \sigma_{a2} \leq 1,344 * 7,34; \quad 5,82 \leq \sigma_{a2} \leq 9,86 ,$$

$$0,796 * 1,24 \leq \sigma_{a3} \leq 1,344 * 1,24; \quad 0,99 \leq \sigma_{a3} \leq 1,67,$$

$$0,796 * 2,40 \leq \sigma_{a4} \leq 1,344 * 2,40; \quad 1,91 \leq \sigma_{a4} \leq 3,22,$$

$$0,796 * 4,75 \leq \sigma_{a5} \leq 1,344 * 4,75; \quad 3,78 \leq \sigma_{a5} \leq 6,38,$$

$$0,796 * 1,88 \leq \sigma_{a6} \leq 1,344 * 1,88; \quad 1,50 \leq \sigma_{a6} \leq 2,53,$$

$$0,796 * 1,14 \leq \sigma_{a7} \leq 1,344 * 1,14; \quad 0,91 \leq \sigma_{a7} \leq 1,53,$$

$$0,796 * 5,00 \leq \sigma_{a8} \leq 1,344 * 5,00; \quad 3,98 \leq \sigma_{a8} \leq 6,72 .$$

Представимо коваріаційну матрицю для матриці X коефіцієнтів початкової системи рівнянь, використавши вбудовану в MS EXCEL функцію «Сервис:Анализ данных:Ковариация»

Коваріаційна матриця K(X <sub>ij</sub> )								
	Сто лбец 1	Сто лбец 2	Сто лбец 3	Сто лбец 4	Сто лбец 5	Сто лбец 6	Сто лбец 7	Сто лбец 8
Сто лбец 1	0,65 0935							
Сто лбец 2	0,62 329	0,56 2919						
Сто лбец 3	0,47 7196	0,44 7682	0,51 7654					
Сто лбец 4	0,66 0651	0,61 7999	0,47 9012	0,65 8491				
Сто лбец 5	0,66 4426	0,61 7492	0,47 4553	0,65 6923	0,63 8263			
Сто лбец 6	0,65 541	0,61 2426	0,46 7147	0,64 4947	0,64 9867	0,64 3146		
Сто лбец 7	0,73 4328	0,68 4717	0,53 2372	0,71 5769	0,72 9207	0,73 5241	0,82 7919	
Сто лбец 8	0,63 6519	0,59 4144	0,45 7765	0,63 1122	0,63 0806	0,62 8049	0,70 0254	0,58 9242

Коваріація  $K_{ij}$  характеризує щільність зв'язку факторів і розкид. Щоб дістати характеристику, яка описує лише залежність між ознаками без розкиду, коваріацію ділять на

добуток середніх квадратичних відхилень

$\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}$ , тобто

$$r_{ij} = K_{ij} / (\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}). \quad (5.6.74)$$

Безрозмірна величина  $r_{ij}$  називається коефіцієнтом кореляції ознак  $X_i$  і  $X_j$ . Вона характеризує щільність лінійної залежності цих ознак, змінюється в межах від -1 до +1. Якщо  $r_{ij} > 0$ , то випадкові величини  $X_i$  і  $X_j$  зв'язані додатною кореляцією, тобто при зростанні однієї випадкової величини друга також має тенденцію до зростання. Якщо  $r_{ij} < 0$ , то випадкові величини зв'язані від'ємною кореляцією (при зростанні однієї випадкової величини - друга зменшується).

Для будь-яких двох факторів  $X_i$  і  $X_j$  коефіцієнт кореляції має властивість

$$-1 \leq r_{ij} \leq +1. \dots \dots \dots (5.6.75)$$

Парні вибірккові коефіцієнти кореляції визначаються за формулою

$$r_{ij} = \frac{\sum_{l=1}^n (X_{il} - \bar{X}_i)(X_{jl} - \bar{X}_j)}{\sqrt{\sum_{l=1}^n (X_{il} - \bar{X}_i)^2 \sum_{l=1}^n (X_{jl} - \bar{X}_j)^2}} \dots \dots \dots (5.6.76)$$

Вибіркова кореляційна матриця в загальному вигляді буде

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2m} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & \dots & r_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & r_{m3} & \dots & r_{mm} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (5.6.77)$$

Властивості кореляційної матриці:

- вона симетрична відносно головної діагоналі ( $r_{ij}=r_{ji}$ );
- елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці ( $r_{ii}=1(i=1,2,\dots,m)$ ).

Кореляційна матриця для коефіцієнтів початкової системи рівнянь  $[X]$  буде

	Кореляційна матриця		системи		початкових		рівнянь X	
	Столбец 1	Столбец 2	Столбец 3	Столбец 4	Столбец 5	Столбец 6	Столбец 7	Столбец 8
>столбец 1	1	0,31835727	-0,061611418	0,183512877	0,753990368	0,27672723	0,439704044	0,32756921
>столбец 2	0,31835727	1	0,166722763	0,216998446	0,345964044	-0,036817127	0,063992219	-0,046131095
>столбец 3	-0,061611418	0,166722763	1	0,099941282	0,020246226	-0,028719455	0,090560639	0,075682513
>столбец 4	0,183512877	0,216998446	0,099941282	1	0,365306801	-0,136431967	-0,100781854	0,198175279
>столбец 5	0,753990368	0,345964044	0,020246226	0,365306801	1	0,306225931	0,466201157	0,364366275
>столбец 6	0,27672723	-0,036817127	-0,028719455	-0,136431967	0,306225931	1	0,631376931	0,527648579
>столбец 7	0,439704044	0,063992219	0,090560639	-0,100781854	0,466201157	0,631376931	1	0,330466672
>столбец 8	0,32756921	-0,046131095	0,075682513	0,198175279	0,364366275	0,527648579	0,330466672	1

		Кореляційна матриця результатів педагогічного експерименту R(Y, X1, X2, X3, X4, X5, X6, X7, X8)								
Y	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8		
Столбец 1	Столбец 2	Столбец 3	Столбец 4	Столбец 5	Столбец 6	Столбец 7	Столбец 8	Столбец 9		
Столбец 1	1									
Столбец 2	0,323592401	1								
Столбец 3	0,103017993	0,31835727	1							
Столбец 4	0,027413357	-0,061611418	0,166722763	1						
Столбец 5	-0,160412227	0,183512877	0,216998446	0,099941282	1					
Столбец 6	0,16061577	0,753690358	0,345964044	0,020246226	0,365308801	1				
Столбец 7	0,352719734	0,27672723	-0,036817127	-0,026719455	-0,136431967	0,306225931	1			
Столбец 8	0,511634281	0,439704044	0,063892219	0,090560639	-0,100781854	0,485201157	0,631376831	1		
Столбец 9	0,211627189	0,32756821	-0,048131095	0,075682513	0,198175279	0,364386275	0,527648579	0,330465672	1	

2,520565168	-0,300645696	0,266860063	0,257280689	-1,710321069	0,188407423	-0,276868173	-0,296044435
-0,300645696	1,284312076	-0,251086901	-0,125660166	-0,336743381	-0,04544034	0,153279758	0,300220944
0,266860063	-0,251086901	1,145666642	-0,085592242	0,049228404	0,218761335	-0,307209146	-0,198725947
0,257280689	-0,125660166	-0,085592242	1,441769573	-0,816489851	0,341097548	0,351248826	-0,36813162
-1,710321069	-0,336743381	0,049228404	-0,816489851	3,147773661	-0,043164736	-0,7598741	-0,170916182
0,188407423	-0,04544034	0,218761335	0,341097548	-0,043164736	2,221045801	-1,140194061	-0,927443161
-0,276868173	0,153279758	-0,307209146	0,351248826	-0,7598741	-1,140194061	2,197034259	0,204115191
-0,296044435	0,300220944	-0,198725947	-0,36813162	-0,170916182	-0,927443161	0,204115191	1,683602683
	Обернена	кореляційна	матриця	Z=1/R			

	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	1	-0,167097804	0,159208161	0,134961625	-0,607193246	0,079628821	-0,117649468	-0,143710378	
2	-0,167097804	1	-0,20986294	-0,09234522	-0,167479647	-0,026904661	0,091249629	0,204167165	
3	0,159208161	-0,20986294	1	-0,067520159	0,026282156	0,139039689	-0,196319169	-0,145071382	
4	0,134961625	-0,09234522	-0,067520159	1	-0,383266724	0,190612735	0,197355184	-0,236284585	
5	-0,607193246	-0,167479647	0,026282156	-0,383266724	1	-0,016324827	-0,288949188	-0,074244046	
6	0,079628821	-0,026904661	0,139039689	0,190612735	-0,016324827	1	-0,51615674	-0,479610565	
7	-0,117649468	0,091249629	-0,196319169	0,197355184	-0,288949188	-0,51615674	1	0,106129742	
8	-0,143710378	0,204167165	-0,145071382	-0,236284585	-0,074244046	-0,479610565	0,106129742	1	
	Частинні коефіцієнти кореляції				$r_{ij} = \frac{z_{ij}}{\sqrt{z_{ii} \cdot z_{jj}}}$				

На основі представлення коваріаційної та кореляційної матриці, були отримані результати

Таблиця 5.6.5. Основні критерії

det(Mкор) )=	0,06672 32	χ <sup>2</sup> <sub>кр</sub> p=	11,7312 11
		χ <sup>2</sup> <sub>кр</sub> p=	41,3371 38
Не існує мультиколінеарність Фактори неза лежні			
		t(0,05;3 0)=	2,04227 24
		t <sub>7</sub> > t <sub>α</sub> найбільш суттєвий фактор	

	X0	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
S(ai)=	39,21 232	4,039 3032 75	7,343 4059 7	1,241 1749	2,402 6758	4,747 1723	1,879 2934	1,137 05	4,991 0081
t(ai)=	1,389 672	1,422 9079 72	0,708 1993 33	- 0,059 469	- 0,402 4739	- 1,470 0076	0,019 7502	2,273 7537	0,488 5205
Kкор( Y, Xi) =		0,323 5924 01	0,103 0179 93	0,027 4134	- 0,160 4122	0,160 6158	0,352 7197	0,511 6343	0,211 6272
		с Інтер ес	d Робо та викла д	е Труд ність	f Наук а	g зв'яз. спец	h Моно гр1	i Моно гр2	j Наук. школ а

При дослідженні зв'язку факторів багатовимірної моделі педагогічного експерименту недостатньо знайти вибірку



кореляційну матрицю. Необхідно визначити частинні коефіцієнти кореляції.

Частинною кореляцією між ознаками  $X_i$  і  $X_j$  буде кореляційна залежність між цими ознаками при фіксованих значеннях інших ознак.

Формула частинного коефіцієнта кореляції між ознаками  $X_i$  і  $X_j$  має вигляд

$$r_{ij.12\dots m} = R_{ij} / \sqrt{R_{ii}R_{jj}}, \dots\dots\dots(5.6.78)$$

де  $R_{ij}, R_{ii}, R_{jj}$  - алгебраїчні доповнення, відповідно до елементів  $r_{ij}, r_{ii}, r_{jj}$  вибіркової кореляційної матриці.

Після визначення вибірових частинних елементів кореляції необхідно перевірити гіпотезу про значущість кореляційного зв'язку між певними ознаками. Вводиться нульова гіпотеза  $H_0$  про відсутність кореляційного зв'язку між ознаками і гіпотеза  $H_1$  про наявність зв'язку між цими ознаками. Ці гіпотези перевіряються. Для цього обчислюється t-статистика

$$t_{ij} = r_{ij.12\dots m} \sqrt{\frac{n-m-1}{1-r_{ij.12\dots m}^2}}, \dots\dots\dots(5.6.79)$$

яка має розподіл Стюдента з  $k = n - m - 1$  ступенями вільності, де  $n$  - число дослідів,  $m$  - порядок кореляційної матриці, що розглядається. Для перевірки нульової гіпотези за заданою надійною ймовірністю  $p$  і числом ступенів вільності  $k$  необхідно за таблицею розподілу Стюдента знайти критичне значення  $t_{p,k}$ .

Якщо,  $\left|t_{ij}\right| \geq t_{p,k}$ , то нульову гіпотезу про відсутність кореляційного зв'язку між ознаками  $X_i$  і  $X_j$  слід відкинути, тобто із заданою надійністю Р можна вважати, що кореляційний зв'язок між ознаками  $X_i$  і  $X_j$  існує.

Формулу частинного коефіцієнта кореляції можна виразити не лише через алгебраїчні доповнення, а й через елементи матриці, оберненої до кореляційної матриці.

Якщо, чисельник і знаменник поділити на визначник кореляційної матриці, то частинний коефіцієнт кореляції можна представити у вигляді формули

$$r_{ij.12\dots m} = \frac{R_{ij} / |R|}{\sqrt{R_{ii} R_{jj} / |R|^2}} = \frac{z_{ij}}{\sqrt{z_{ii} z_{jj}}}, \quad (5.6.80)$$

де  $z_{ij}, z_{ii}, z_{jj}$  - елементи матриці  $[Z]$ , оберненої до матриці  $[R]$ .

Так як обернена матриця може знаходитися за формулою

$$[R^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{R_{11}}{|R|} & \frac{R_{21}}{|R|} & \frac{R_{31}}{|R|} & \dots & \frac{R_{m1}}{|R|} \\ \frac{R_{12}}{|R|} & \frac{R_{22}}{|R|} & \frac{R_{32}}{|R|} & \dots & \frac{R_{m2}}{|R|} \\ \frac{R_{13}}{|R|} & \frac{R_{23}}{|R|} & \frac{R_{33}}{|R|} & \dots & \frac{R_{m3}}{|R|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{R_{1m}}{|R|} & \frac{R_{2m}}{|R|} & \frac{R_{3m}}{|R|} & \dots & \frac{R_{mm}}{|R|} \end{bmatrix}, \quad (5.6.81)$$

то  $R_{ij} / |R|$  — елемент  $Z_{ij}$  оберненої матриці. Для симетричної матриці  $Z_{ij}=Z_{ji}$ .

Рационально користуватися формулою частинного коефіцієнта кореляції, вираженого через елементи оберненої матриці, тому що в оболонці електронних таблиць можна знаходити кореляційну матрицю та оберену до неї.

### 5.7. Виключення з математичної моделі незначимих факторів

Приведемо таблицю коефіцієнтів множинної кореляції факторів.

Таблиця 5.7.1. Таблиця коефіцієнтів множинної кореляції факторів

№п/п	X <sub>i</sub>	Фактори	R(X <sub>i</sub> )
1	X7	Монографія 2	0,512
2	X6	Монографія 1	0,353
3	X1	Інтерес до вивчення дисципліни	0,324
4	X8	Наукова школа	0,212
5	X5	Зв'язок зі спеціальністю	0,161
6	X2	Оцінка студентами роботи викладача	0,103
7	X3	Трудність вивчення дисципліни	0,027
8	X4	Елементи наукового пошуку	0,160

Побудуємо математичну модель на основі перших трьох факторів.

Приведемо таблицю коефіцієнтів початкових рівнянь.

Таблиця 5.7.2. Таблиця коефіцієнтів початкових рівнянь

Оцінка EST=Y	X0	X1	X6	X7
100	1	5	5	5
90	1	5	5	5
90	1	5	5	5
100	1	5	5	5
89	1	4	5	4
89	1	5	5	5
95	1	5	5	5
100	1	5	5	5
90	1	5	5	5
89	1	4	5	0
100	1	5	5	5
80	1	4	0	0
89	1	4	5	4
90	1	5	5	5
100	1	5	5	5
90	1	5	5	5
100	1	4	5	5
100	1	5	4	5
77	1	5	4	0
77	1	5	5	5
100	1	5	5	5
100	1	5	5	5
90	1	4	5	4
100	1	5	5	5
100	1	5	5	5
100	1	5	5	5
100	1	5	5	5
100	1	5	5	5
100	1	5	5	5
100	1	5	5	5
85	1	4	5	5

90	1	5	5	5
90	1	4	5	5
86	1	5	5	5
86	1	5	5	5
100	1	5	5	5
90	1	5	5	5
95	1	5	5	5
100	1	5	5	5
3547	38	182	183	172

Матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь матиме вигляд

Матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь			
38	182	183	172
182	878	880	833
183	880	907	855
172	833	855	848

Обернена матриця при цьому буде

Обернена матриця			
4,38236637 7	-0,82275011	-0,19963453	0,12060301 5
		0,00014426 2	- 0,02607775 7
-0,82275011	0,19628285		
	0,00014426 2	0,06467745 4	- 0,02486114 8
-0,19963453			
0,12060301 5	-0,02607775	-0,02486114	0,02740015 9

Визначник оберненої матриці	
$\Delta=4,80873E-06$	

Встановимо значення вектора вільних членів

YX0	YX1	YX6	YX7
100	500	500	500
90	450	450	450
90	450	450	450
100	500	500	500
89	356	445	356
89	445	445	445
95	475	475	475
100	500	500	500
90	450	450	450
89	356	445	0
100	500	500	500
80	320	0	0
89	356	445	356
90	450	450	450
100	500	500	500
90	450	450	450
100	400	500	500
100	500	400	500
77	385	308	0
77	385	385	385
100	500	500	500
100	500	500	500
90	360	450	360
100	500	500	500
100	500	500	500

100	500	500	500
100	500	500	500
100	500	500	500
100	500	500	500
85	340	425	425
90	450	450	450
90	360	450	450
86	430	430	430
86	430	430	430
100	500	500	500
90	450	450	450
95	475	475	475
100	500	500	500
3547	17023	17158	16237

Таким чином, вектор вільних членів буде

Вектор вільних членів	
3547	L0
17023	L1
17158	L6

В результаті рішення нормальних рівнянь, отримали

Вектор невідомих	
71,48012791	X0
2,07899786	X1
0,417373951	X6
2,18603544	X7

Таким чином, нами отримана математична модель у вигляді:

$$\tilde{Y} = 71.480128 + 2.078998X_1 + 0.417374X_6 + 2.186035X_7. \quad (5.7.1)$$

За вбудованою в MS Excel функцією ЛИНЕЙН, ми отримали

X7	X6	X1	X0=1		
2,186035 44	0,4173739 51	2,078997 86	71,480127 91	=ai	Коефіцієнт и
1,032269 785	1,5859633 07	2,762853 478	13,054823 9	стандарт S	ai=S√dii
0,275303 983	6,2361517 74	#Н/Д	#Н/Д	R^2	m1=μ
4,305407 7	34	#Н/Д	#Н/Д	Fстатист ика	n-m-1
502,3066 072	1322,2460 24	#Н/Д	#Н/Д	[(Y'- Ycp)^2]	[VV]Остат очна

	Функція ЛИНЕЙН для X7				
2,621969 697	81,47424242	#Н/ Д	#Н/Д	=ai	Коефіцієнт и
0,733859 185	3,466720766	#Н/ Д	#Н/Д	стандарт S	ai=S√dii
0,261769 637	6,116780543	#Н/ Д	#Н/Д	R^2	m1=μ
12,76526 597	36	#Н/ Д	#Н/Д	Fстатист ика	n-m-1
477,6124 801	1346,940152	#Н/ Д	#Н/Д	[(Y'- Ycp)^2]	[VV]Остат очна

	Функція ЛИНЕЙН для X6		
2,971340839	79,03275333	=ai	Коефіцієнти
1,313776715	6,418497928	стандарт S	ai=S√dii
0,12441121	6,66157687	R^2	m1=μ
5,115190636	36	Fстатистика	n-m-1
226,9948015	1597,55783	[(Y'-Ycp)^2]	[VV]Остаточна

	Функція ЛИНЕЙН для X1	
--	-----------------------	--



5,5	67	=ai	Коефіцієнти
2,680368445	12,88397745	стандарт S	ai=S√dii
0,104712042	6,736096793	R^2	m1=μ
4,210526316	36	Fстатистика	n-m-1
191,0526316	1633,5	[(Y'-Ycp)^2]	[VV]Остаточна

### Висновки

При проведенні теоретичних і експериментальних досліджень отримані наступні результати.

1. Розроблені методологічні основи побудови математичної моделі в рамках роботи наукової школи.

Після здачі курсового екзамену по дисципліні «Економіко математичне моделювання», було проведено анкетування з метою врахування думки студентів і вдосконалення роботи викладача. Студенти відповіли на 8 факторних ознак, на основі яких з'явилась можливість побудови регресійної моделі залежності якості засвоєння дисципліни в залежності від таких факторних ознак як інтерес до вивчення дисципліни, трудність вивчення дисципліни, зв'язок зі спеціальністю і т.і.

2. Приведена описова статистика матриці значень факторних ознак,

де були встановлені по кожній із них середнє значення, стандартна похибка, медіана, мода, стандартне відхилення, дисперсія вибірки, ексцес, асиметричність, мінімум, максимум при рівні надійності 95%.

3. Порівнюючи результати екзамену на основі цінки викладача з оцінками, виставленими комп'ютером, середній бал викладача склав 93,34 і комп'ютера, також, 93,34; стандартна похибка 1,13 бали і 0,67; медіана 92,5 і 94,4; мода 100 і 94,4; стандартне відхилення 7,0 і 4,1;

дисперсія вибірки 49,3 і 17,2; ексцес – 0,37 і 4,15; асиметричність -0,66 і -1,76.

4.Приведені теоретичні основи обробки експериментальних даних.При цьому на базі факторних ознак формується система початкових рівнянь. Від системи початкових рівнянь проведений перехід до системи нормальних рівнянь , що дало можливість застосувати традиційну процедуру способу найменших квадратів і отримати математичну модель

$$\dots\dots\dots Y' = 54.492X_0 + 5.747X_1 + 5.200X_2 - 0.074X_3 - 0.967X_4 - 6.978X_5 + 0.037X_6 + 2.585X_7 + 2.438X_8.$$

5.Проведений контроль процедури зрівноваження, який засвідчив коректність виконання розрахунків.

6. Виконано дослідження матриці на невіродженість, де була доказана теорема: **Система рівнянь не має рішення в тому і тільки в тому випадку , коли визначник оберненої матриці нормальних рівнянь дорівнює абсолютному нулю. У всіх інших випадках система має рішення.**

7. Відображено дослідження коефіцієнта множинної кореляції.

8. Встановлено, що з надійністю 91% коефіцієнт детермінації статистично значимий і включені у регресію фактори достатньо пояснюють залежність показника.

9. Висвітлені надійні інтервали базисних даних та прогнозу. Доказується теорема 2 п'ятого розділу:

**Якщо за істинну модель прийняти зрівноважену модель, то всі коефіцієнти моделі будуть значимі при коефіцієнті множинної детермінації  $R^2=1$ .**

10. Розроблені критерії оцінювання знань студентів.

При традиційному оцінюванні знань студентів абсолютно відсутня інформація про точність з якою проведено таке оцінювання, тобто відсутня інформація про середню квадратичну похибку іспитової оцінки.

На основі розробленої математичної моделі базового курсу приводиться не лише середня квадратична похибка оцінювання знань студентів (по всій групі, курсу, тощо), але і індивідуальна середня квадратична похибка в оцінюванні знань кожного конкретного студента.

Такий підхід до оцінювання знань студентів нами розроблений вперше.

11.Проведений аналіз коваріаційної та кореляційної матриць, який дав можливість встановити повну оцінку точності зрівноважених елементів і виявити тісноту зв'язку окремих факторів з результуючою ознакою.

12.Проведено виключення з математичної моделі незначимих факторів.

Отримана математична модель:

$$Y' = 71.480 + 2.079X_1 + 0.417X_6 + 2.186X_7.$$

При включенні в математичну модель лише одного фактора  $X_7$ :  $Y' = 81.474 + 2.621X_7$ . При цьому середні квадратичні похибки коефіцієнтів  $m_{x_0} = 3.466$ ,  $m_{x_7} = 0.733$ .

При включенні в математичну модель  $X_6$ :  $Y' = 79.033 + 971X_6$ ;  $m_{x_0} = 6.41$ ;  $m_{x_6} = 1.31$ . При включенні в математичну модель  $X_1$ :  $Y' = 67 + 5.5X_1$ ;  $m_{x_0} = 12.88$ ;  $m_{x_1} = 2.68$ .

## ЛІТЕРАТУРНІ ДЖЕРЕЛА

1. Андрощук Л.М. Побудова і дослідження математичної моделі якості засвоєння базової дисципліни методом статистичних випробувань Монте Карло. Апроксимація поліномом першого степеня. Модель ППП 81-95.МЕГУ, Рівне, 2009,-32 с.
- 2.Бугір М.К.Теорія ймовірності та математична статистика: Підручники & Посібники, Тернопіль,1998,-176 с.
3. Васильченко І.П., Васильченко З.М. Фінансова математика. Навч. Посібник.-К.:Кондор, 2007.-184 с.
4. Гласс Дж., Стэнли Дж. Статистические методы в педагогике и психологии. М.:Прогресс, 1976, -495 с.
5. Казаков В.А. Самостоятельная работа студентов:учебное пособие.-К.:УМК ВО.- 1989,-252 с.
6. Кремер Н.Ш.,Путко Б.А.Эконометрика.:Учебник для Вузов./Под ред. Проф. Н.Ш.Кремера.-М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2003, - 311 с.
7. Літнарівч Р.М. Теоретико-методологічні аспекти і базові принципи функціонування наукової школи в рамках професійної освіти. Монографія. МЕГУ, Рівне, 2009, - 383 с.
- 8.Літнарівч Р.М.Побудова і дослідження істинної моделі якості засвоєння базової дисципліни. Апроксимація поліномом першого степеня. МЕГУ, Рівне, 2009,-32 с.
9. Ржевський С .В., Александрова В.М. Дослідження операцій. К.: Академвидав, 2006, - 560 с.
10. Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии.- СПб.: ООО «Речь», 2003.- 350 с.

11. Тихонов И.И. Методы научной организации и управления в учебном процессе.- М.: Знание,1976,-42 с.
12. Толбатов Ю.А. Эконометрика. Тернопіль:Підручники і посібники, 20087, - 288 с.

**ЛІТНАРОВИЧ РУСЛАН МИКОЛАЙОВИЧ ,**  
кандидат технічних наук, доцент

**ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ  
ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ БАЗОВОЇ  
ДИСЦИПЛІНИ В РАМКАХ РОБОТИ НАУКОВОЇ  
ШКОЛИ**

**Частина 5**

**Наукове видання**

Комп'ютерний набір, верстка, редагування  
і макетування та дизайн в редакторі  
Microsoft® Offise® Word 2003 Р.М.Літнорович

33027 Рівне , Україна  
Вул..С.Дем'янчука, 4, корпус 1

Телефон : (+00380) 362 23 – 73 – 09  
Факс :(+00380) 362 23 – 01 – 86  
E-mail:mail@regi.rovno.ua